山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷（A卷）答案

（非数学类，2023）

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A　2. D　3. B　4. B　5. C

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. $\sqrt{2}$　2. 1　3. $\frac{1}{3}$　4. 0　5. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$

三、解答题

1.解　由题知，$x=0$，$x=1$为间断点.

在$x=0$处，

解法一　$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-x\cdot\cos x}=0,$$

解法二　$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\ln|x|\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0,$$

所以$x=0$为第一类间断点且为可去间断点.

在$x=1$处，$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\sin 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\sin 1,$$

所以$x=1$为第一类间断点且为跳跃间断点.

2.**解法一**　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\ln(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}},$$

其中，$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=\frac{1\cdot 2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2},$$ 于是原式$=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

解法二 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{\left[1+(\tan x-1)\right]^{\frac{1}{\tan x-1}}\right\}^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

3.**解** 两边取两次对数，得 $\ln\ln y=\ln(x^x\ln x)=x\ln x+\ln\ln x$，

上式两边同时对 x 求导，得 $\dfrac{y'}{y\ln y}=\ln x+1+\dfrac{1}{x\ln x}$

于是 $y'=y\ln y\left(\ln x+1+\dfrac{1}{x\ln x}\right)=x^{x^x+x-1}(x\ln^2 x+x\ln x+1)$.

4.**证明** 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$，由题意知，$F(0)=0$，$F(1)=0$.

在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上分别使用拉格朗日中值定理，有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=F'(\xi)\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}\left[f'(\xi)-\xi^2\right],\quad \xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=F'(\eta)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f'(\eta)-\eta^2\right],\quad \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

上两式相加，得

$$F(1)-F(0)=\frac{1}{2}\left[f'(\xi)-\xi^2\right]+\frac{1}{2}\left[f'(\eta)-\eta^2\right]=0,$$

即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$，结论得证.

5.**解法一** 令 $x=\tan t$，$t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，则有 $dx=\sec^2 t dt$，所以

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt=\int\csc t dt=\ln\left|\csc t-\cot t\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C.$$

解法二 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

当 $x>0$ 时，$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}dt=-\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$

$$=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C=-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+C=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+C,$$

当 $x<0$ 时，$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C = \ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}+C,$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C$.

6.**解** 设切点为 (a,a^3)，则过切点的切线方程为 $Y-a^3=3a^2(X-a)$，

因为切线过点 $(2,0)$，则有 $0-a^3=3a^2(2-a)$，即 $a^3+3a^2(2-a)=0$.

可解得 $a=0$ 或 $a=3$，即两切点坐标为：$(0,0)$ 与 $(3,27)$，相应的两切线方程为 $Y=0$ 与 $27X-Y-54=0$.

选取 y 为积分变量，则有 $S=\int_0^{27}(\frac{y}{27}+2-\sqrt[3]{y})\mathrm{d}y = \left(\frac{y^2}{54}+2y-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^{27} = \frac{27}{4}$.