

座号:

身份证号:

姓名:

所在院校:

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷(B卷)

（非数学类，2023）

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分

题 号	一	二	三	总 分
满 分	15	25	60	100
得 分				

注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得 分	
评阅人	

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是（ ）.A. $[-1,1]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ C. $[0,1]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 2. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有（ ）.A. $a_n < b_n$ 对任意 n 都成立 B. $b_n < c_n$ 对任意 n 都成立
C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在3. 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 则下列选项正确的是（ ）.A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

4. 若 $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(1) = \frac{3}{2}\pi$, 则 $F(x)$ 为 ().

- A. $\arcsin x$ B. $\arcsin x + \pi$ C. $\arccos x + \pi$ D. $\arcsin x + C$

5. 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为 ().

- A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$
 B. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$
 C. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$
 D. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n =$ _____.
2. 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x_0-3h) - f(x_0) + 2h$ 是 h 的高阶无穷小量, 则 $f'(x_0) =$ _____.
3. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 $k \cdot c =$ _____.
4. $\frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt \right) =$ _____.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} =$ _____.

得 分	
评阅人	

三、综合题 (本题共 6 小题, 共 60 分, 请写出相应演算步骤。)

1. (本小题 10 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{e^{x-1}} - 1}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并判断其间断点类型.

2. (本小题 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

3. (本小题 10 分) 方程 $\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x}$ ($x > 0$, $y > 0$) 确定函数 $y = f(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

4. (本小题 10 分) 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是满足 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ 的实数, 证明多项

式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

5. (本小题 10 分) 计算 $\int e^{2x} \cos e^x dx$.

6. (本小题 10 分) 求曲线 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ 及 $y = 0$ 所围成的区域的面积 S .