

座号:

身份证号:

姓名:

所在院校:

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）总决赛试卷

（非数学类，2023）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	总 分
满 分	20	20	60	100
得 分				

注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得 分	
评阅人	

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，则常数 a, b 满足 ().A. $a < 0, b < 0$ B. $a > 0, b > 0$ C. $a \leq 0, b > 0$ D. $a \geq 0, b < 0$ 2. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $x f''(x) + 3x [f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ ，若 $f'(x_0) = 0$ ($x_0 \neq 0$)，则 ().A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 则方程 $\int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt = 0$

在区间 (a, b) 内的根是 ().

- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 无穷多个

4. 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} = ()$.

- A. $2dx - dy$ B. $-2dx + dy$ C. $dx - dy$ D. $-dx + dy$

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 ().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知参数方程 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2)du \\ y = [f(t^2)]^2 \end{cases}$, 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 则

$\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 求 $\int x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 过点 $M_0(2, 4, 0)$ 且与直线 $L: \begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ 平行的直线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	
评阅人	

三、综合题（本题共 5 小题，共 60 分，请写出相应演算步骤。）

1. (本题 10 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定，求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right].$$

2. (本题 10 分) 求不定积分 $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$.

3. (本小题 14 分)

(1) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则至少存在一点

$\xi \in [a, b]$ ，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

(2) 已知 $\varphi(x)$ 具有二阶导数， $\varphi(2) > \varphi(1)$ ， $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$ ，则至少存在一点

$\xi \in (1, 3)$ ，使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

4. (本小题 14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x=1$, $y=0$ 所围成的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

5. (本小题 12 分)求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$

所围成的平面区域(如图所示).

