

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）总决赛试卷

（非数学类，2025）

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分

题号	一（20分）				二（20分）				三（60分）					总分
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
得分														
阅卷人														

- 注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。
2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

一、单项选择题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，请将答案填在题目的括号内。）

1. 已知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足： $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2 (n = 1, 2, 3 \cdots)$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时() .

- A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小 B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小
- C. x_n 与 y_n 是等价无穷小 D. x_n 与 y_n 是同阶但非等价无穷小

2. 函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{e^{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x - 2)}$ 的第二类间断点的个数为() .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 下列函数中，在 $x = 0$ 处不可导的是() .

- A. $f(x) = |x| \sin|x|$ B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$
- C. $f(x) = \cos|x|$ D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

4. 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径， r 是实数，则() .

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$

B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \leq R$

C. 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散

D. 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 请将答案填在题目的横线上。)

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] =$ _____.

6. 方程 $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x}$ ($x > 0, y > 0$) 确定函数 $y = f(x)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

7. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____.

8. 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为_____.

三、综合题 (本大题共 5 个小题, 共 60 分, 请写出相应演算步骤。)

9. (10 分) 求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值与最小值.

所在院校: _____ 姓名: _____ 身份证号: _____ 准考证号: _____ 座号: _____

.....
密 封 线
.....

10. (10 分) 设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

11. (12 分) 设 $f(x)$ 对任意的 x, y 恒有 $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$, 且 $f'(0) = e$, 求 $f(x)$.

所在院校: _____ 姓名: _____ 身份证号: _____ 准考证号: _____ 座号: _____

..... 密 封 线

12. (13 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 计算 $\iint_D \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right| dx dy$.

13. (15 分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

$\int_0^1 f(x) dx = 1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.