

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷答案

(非数学类, 2025)

一、选择题（每小题4分，共20分）

1.C 2.B 3.D 4.D 5.A

二、填空题（每小题4分，共20分）

1. $\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$ 2. $\underline{2}$ 3. $\underline{2021!}$ 4. $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ 5. $\frac{4}{\pi}-1$

三、综合题（本题共6小题，共60分，请写出相应演算步骤。）

1. 解当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}$,2分

当 $x = 0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \frac{\pi}{2}$,5分

$$\text{综上 } f'(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4} & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}) = \frac{\pi}{2} = f'(0)$, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续.8分

2. 解 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x}$ 1分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt - e^x + 1}{x^2}$$
3分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt + \sin x \cdot e^{x^2} - e^x}{2x}$$
5分

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot e^{x^2}}{x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x - e^x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}
\end{aligned}$$

3. 解 $y' = (e^{x^2 \ln x})' + e^{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{1+a^{x^2}} (1+a^{x^2})' \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$= e^{x^2 \ln x} (2x \ln x + x) + e^{\sin x} \cdot \cos x + \frac{2xa^{x^2} \ln a}{1+a^{x^2}}$$

$$= x^{x^2+1} (2 \ln x + 1) + \cos x \cdot e^{\sin x} + \frac{2xa^{x^2} \ln a}{1+a^{x^2}}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

4. 证 (1) 设 $F(x) = f(x) - 3x$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有连续导数, 所以 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续且可导, $F'(x) = f'(x) - 3$.

又因为 $F(1) = f(1) - 3 = 1 - 3 = -2$, $F(2) = f(2) - 6 = 4 - 6 = -2$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - 3 = 0$, 即 $f'(\xi) = 3$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 设 $G(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有连续导数, 则 $G(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续且可导, $G'(x) = f'(x) + x - 2$.

又 $G(0) = f(0) = 4$, $G(1) = f(1) + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$, $G(2) = f(2) - 2 = 2$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以由零点定理知, 至少存在一点 $\eta_1 \in (0, 1)$, 使得 $G(\eta_1) = 0$;

同理可得, 至少存在一点 $\eta_2 \in (1, 2)$, 使得 $G(\eta_2) = 0$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

再由罗尔定理知, 至少存在一点 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 2)$,

使得 $G'(\eta) = f'(\eta) + \eta - 2 = 0$, $f'(\eta) + \eta = 2$12 分

5. 解 (1) 将 $x=0$, $y=0$ 代入方程, 得 $a+b=0$1 分

方程两边同时对 x 求导, 得

$$ae^x + 2yy' + y' - \frac{\cos y}{1+x} + \ln(1+x) \cdot \sin y \cdot y' = 0 \text{ ①} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

将 $x=0$, $y=0$, $y'=0$ 代入①式, 得 $a=1$, $b=-1$5 分

(2) ①式两边同时对 x 求导, 得

$$ae^x + 2(y')^2 + 2yy'' + y'' - \frac{-\sin y \cdot y' \cdot (1+x) - \cos y}{(1+x)^2} + \frac{\sin y}{1+x} \cdot y' +$$

$$\ln(1+x) \cdot \cos y \cdot (y')^2 + \ln(1+x) \cdot \sin y \cdot y'' = 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

将 $x=0$, $y=0$, $y'=0$, $a=1$ 代入上式得, $y''(0) = -2 < 0$.

所以 $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.12 分

6. 解 $V_x = \int_0^1 [\pi(e^x)^2 - \pi(\sin x)^2] dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - \sin^2 x) dx \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$= \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \pi \int_0^1 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_0^1 - \frac{\pi}{2} [x - \frac{1}{2} \sin 2x]_0^1$$

$$= \pi [\frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{2} \sin 2) - 1] \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$V_y = \int_0^1 2\pi x(e^x - \sin x) dx \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$= 2\pi (\int_0^1 x e^x dx - \int_0^1 x \sin x dx)$$

$$= 2\pi (\int_0^1 x e^x dx - \int_0^1 x \sin x dx) = 2\pi (\int_0^1 x d e^x + \int_0^1 x d \cos x)$$

$$= 2\pi[(xe^x)|_0^1 - \int_0^1 e^x dx] + (xcosx)|_0^1 - \int_0^1 cos x dx]$$

$$= 2\pi(1+cos1-sin1). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$