

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷

（非数学类，2025）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	总 分
满 分	20	20	60	100
得 分				

注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得 分	
评阅人	

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x)$ ， $\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

- ①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$
- ②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ ，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$
- ③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$
- ④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

其中所有真命题的序号是（ ）。

- A. ①② B. ①④ C. ①③④ D. ②③④

2. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$ ，则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = (\quad)$ 。

- A. $b \sin a$ B. $b \cos a$ C. $b \sin f(a)$ D. $b \cos f(a)$



3. 设 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ().

A. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ B. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

C. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ D. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$,

则 ().

A. $N < P < M$ B. $M < P < N$ C. $N < M < P$ D. $P < M < N$

5. 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 的奇偶性与 a ().

A. 有关 B. 无关 C. 可能有关 D. 都不对

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} [a \arctan \frac{1}{x} + (1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在, 则 $a =$ _____.

2. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sin x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线重合, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(\frac{2}{n}) =$ _____.

3. 设函数 $f(x) = \frac{x^{2021} - 1}{x}$, 则 $f^{(2021)}(1) =$ _____.

4. 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

5. 设函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx =$ _____.

得 分	
评阅人	

三、综合题 (本题共 6 小题, 共 60 分, 请写出相应演算步骤。)



所在院校: _____ 姓名: _____ 身份证号: _____ 座号: _____



1. (本小题 8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

密 封 线

2. (本小题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$



3. (本小题 8 分) 设 $y = x^x + e^{\sin x} + \ln(1+x^2)$, 求 y' .

4. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有连续导数, 其中 $f(0) = f(2) = 4$, $f(1) = 1$.

证明: (1) 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f'(\xi) = 3$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f'(\eta) + \eta = 2$.



所在院校:

姓名:

身份证号:

座号:

密 封 线

5. (本小题 12 分) 已知可导函数 $y = y(x)$ 满足 $ae^x + y^2 + y - \ln(1+x) \cos y + b = 0$,

且 $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(1) 求 a , b 的值;

(2) 判断 $x = 0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.



6. (本小题 12 分) 求曲线 $y=e^x$, $y=\sin x$ 与 $x=0$, $x=1$ 所围成的图形分别绕 x 轴, 绕 y 轴旋转所形成的立体的体积.

