

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷

（非数学类，2024）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分

题号	一	二	三	总分
满分	25	25	50	100
得分				

注意：1. 答题前，请参赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得分	
评阅人	

一、单项选择题（每小题 5 分，共 25 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] = (\quad)$.

A. $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

2. 函数 $f(x) = x \sin x$ ().

- A. 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限

3. 设函数 $f(x) = |x^3 - 1| \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的 ().

- A. 充分必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分但非必要条件 D. 既非充分也非必要条件

4. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = (\quad)$.

- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 设函数 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则点

$x = x_0$ 是 $f(x)$ 的 $(\quad)$.

- A. 极小值点 B. 极大值点 C. 拐点 D. 以上都不对

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	
评阅人	

三、综合题 (本题共 5 小题, 共 50 分, 请写出相应演算步骤。)

1. (本小题 8 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right]$ ($a \neq 0$).

所在院校: _____ 姓名: _____ 身份证号: _____ 座号: _____

.....
●
.....
线
.....
●
.....
密
.....
●
.....

2. (本小题 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x < 0 \\ \sqrt{2}, & x = 0 \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a, b. \\ \frac{1}{x-\sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t^2}} dt, & x > 0 \end{cases}$

3. (本小题 10 分) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$.

4. (本小题 12 分) 在曲线 $y = x^2$ ($x \geq 0$) 上某点 A 处做一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围成图形的面积为 $\frac{1}{12}$, 试求:

(1) 切点 A 的坐标; (2) 过切点 A 的切线方程;

(3) 由上述所围平面绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

所在院校: 姓名: 身份证号: 座号:

线
封
密

$[0,1]$

$(0,1)$ 内

5. (本小题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$,

$f(1) = \frac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.