

7.1.1 引例

例 曲线上任意一点处的切线斜率等于 $2x$ ，且该曲线通过点 $(1,2)$ ，求该曲线的方程。

解 设所求曲线为 $y = f(x)$ ，由导数的几何意义可知， $y = f(x)$ 满足关系式 $\frac{dy}{dx} = 2x$

对式(7-1)两边积分，得 $y = \int 2x dx = x^2 + C$ (C 为任意常数)

又因曲线经过点 $(1,2)$ ，故所求曲线应满足 $y|_{x=1} = 2$

将其代入方程中，得 $C = 1$

所求方程为 $y = x^2 + 1$

解决此问题的方法为首先建立一个含有未知函数的导数的方程，然后通过此方程求出满足所给附加条件的未知函数。

7.1.2 微分方程的概念

1. 微分方程的定义

表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程称为微分方程。

注：在微分方程中，自变量及未知函数可以不出现，但未知函数的导数必须出现。

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程。

未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程。



2. 微分方程的阶

微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶。

一般地，一阶微分方程的一般形式为

$$y' = f(x, y) \quad \text{或} \quad F(x, y, y') = 0$$

二阶微分方程的一般形式为

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{或} \quad F(x, y, y', y'') = 0$$

n 阶微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{或} \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

例1 指出下列微分方程（其中 y, v, θ 均为未知函数）的阶数。

(1) $y' = kx$, k 为常数;

(2) $(y - 2xy) dx + x^2 dy = 0$;

(3) $mv'(t) = mg - kv(t)$;

(4) $y'' = \frac{1}{a} + \sqrt{1 + y'^2}$;

(5) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ (g, l 为常数).

解 方程 (1) - (3) 为一阶微分方程,

方程 (4) - (5) 为二阶微分方程。



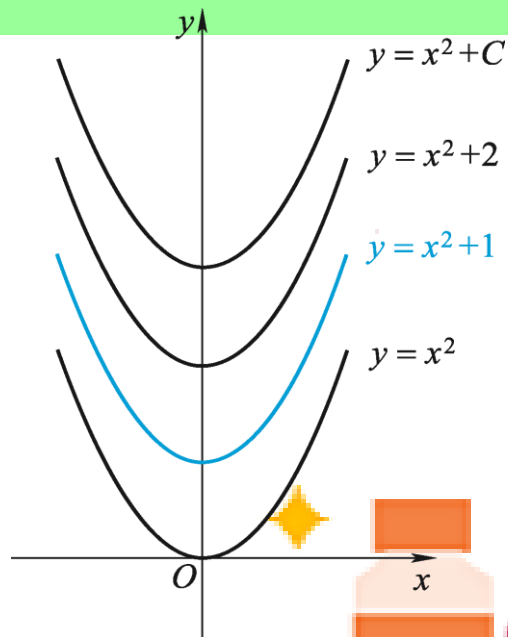
3. 微分方程的解

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足一个微分方程，则称它是该微分方程的解。

求微分方程的解的过程，称为解微分方程。

若微分方程的解中含有相互独立的任意常数，并且任意常数的个数等于该微分方程的阶数，则这个解称为该微分方程的通解。

如 $y = x^2 + C$ 是方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的通解。



通解中的任意常数，根据某些条件确定下来后，对应的解称为该微分方程的一个**特解**。用于确定通解中任意常数的条件称为**初始条件**。

例如， $\frac{dy}{dx} = 2x$ 是方程 $y|_{x=1} = 2$ 满足初始条件 $y = x^2 + 1$ 的特解。

利用微分方程解决实际问题时，步骤大致如下：

第一步 分析问题，建立微分方程，并列出初始条件；

第二步 求微分方程的通解；

第三步 利用初始条件，确定通解中的任意常数，解出微分方程的特解。

7.2 一阶微分方程

01

可分离变量的
微分方程

02

齐次型微分方程

03

一阶线性微分方程

7.2.1 可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程能化成

$$g(y)dy = f(x)dx$$

的形式，也就是说，微分方程可化成一端只含 y 的函数和 dy 的乘积，

✦而另一端只含 x 的函数和 dx 的乘积，那么原方程就称为**可分离变量的微分方程**。



可分离变量的微分方程的解法称为**分离变量法**。其步骤如下：

(1) 分离变量： $g(y)dy = f(x)dx$ ；

(2) 两边求不定积分： $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ ，

得通解 $G(y) = F(x) + C$ 。

其中， $G(y)$, $F(x)$ 分别为 $g(y)$, $f(x)$ 的一个原函数。

例1 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解。

解

方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

分离变量得

$$\frac{1}{1+y^2} dy = (1+x) dx$$

两边积分

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int (1+x) dx$$

得

$$\arctan y = \frac{1}{2} x^2 + x + C$$

故原方程的通解为

$$y = \tan \left(\frac{1}{2} x^2 + x + C \right)$$



例2 求微分方程 $y = x^2 dy = 2xy dx$ 的通解。

解 分离变量得 $\frac{1}{y} dy = 2x dx$

两边积分得 $\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$

$$\ln |y| = x^2 + C_1$$

$$|y| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

即

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

若令 $C = \pm e^{C_1}$ 仍是任意常数，

便得所给微分方程的通解 $y = Ce^{x^2}$ 。

7.2.2 齐次型微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为 **齐次型微分方程**。

解法（变量替换法）

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = xu$ ， $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入上式，得

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

整理得

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (\text{可分离变量方程})$$

可求其通解，进而求得齐次型微分方程的解。

例3 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解。

解 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 将其代入原方程, 得 $u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$

即 $\frac{du}{dx} = \frac{\tan u}{x}$.

分离变量得 $\cot u du = \frac{1}{x} dx$

两边积分得 $\int \cot u du = \int \frac{1}{x} dx$

解得 $\ln(\sin u) = \ln x + \ln C$

即 $\sin u = Cx$ 因为 $u = \frac{y}{x}$, 故原方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx$ 。

7.2.3 一阶线性微分方程

定义：形如 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程，

其中 $p(x), Q(x)$ 为已知连续函数。

当 $Q(x) \equiv 0$ 时，方程变为 $y' + p(x)y = 0$ ，称为一阶线性齐次微分方程。

当 $Q(x) \neq 0$ 时，对应的微分方程称为一阶线性非齐次微分方程。

1. 一阶线性齐次微分方程的解法

分离变量

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

两边积分

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx$$

$$\ln y = -\int p(x) dx + \ln C$$

故一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

注：微分方程求解过程中， $\ln|y|$ 中的符号可以放到任意常数 C 中，故可直接写成 $\ln y$ ，简化计算过程。



例1 求方程 $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 0$ 的通解。

解1 所给方程为一阶线性齐次方程，且 $p(x) = 3x^2$ ，根据通解公式得

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int 3x^2dx} = Ce^{-x^3}$$

解2 所给方程为一阶线性齐次方程，可整理为 $\frac{dy}{dx} = -3x^2y$

分离变量 $\frac{dy}{y} = -3x^2dx$

两边积分 $\int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2dx$

得 $\ln y = -x^3 + \ln C$

即 $y = Ce^{-x^3}$

故该微分方程的通解为

$$y = Ce^{-x^3}$$



2. 一阶线性非齐次微分方程的解法

求一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的通解，可采用“常数变易法”，即将上述一阶线性齐次微分方程通解中的常数 C 换成待定函数 $C(x)$ ，设微分方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的解具有形式 $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$

故 $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx}$

将 y, y' 代入 $y' + p(x)y = Q(x)$ ，得 $C'(x) = e^{\int p(x)dx} Q(x)$

两边积分得 $C(x) = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + C$

可得 $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + C \right]$



例2 求方程 $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ 的通解。

解1 (常数变易法)

将原方程改写成 $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$, 一阶线性非齐次微分方程。

对应齐次方程为 $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$

分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx$

两边积分得 $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$

求得 $\ln y = \ln(1+x^2) + \ln C$

所以对应齐次方程通解为 $y = C(1+x^2)$

由常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y = C(x)(1+x^2)$, 代入原方程得

$$C'(x)(1+x^2) + 2xC(x) - \frac{2x}{1+x^2} C(x)(1+x^2) = 1+x^2$$

$$C'(x)(1+x^2) = 1+x^2$$

$$C'(x) = 1$$

求得 $C(x) = x + C$

由此得原方程的通解为

$$y = (1+x^2)(x+C)$$



解2 (公式法)

将原方程改写成 $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$

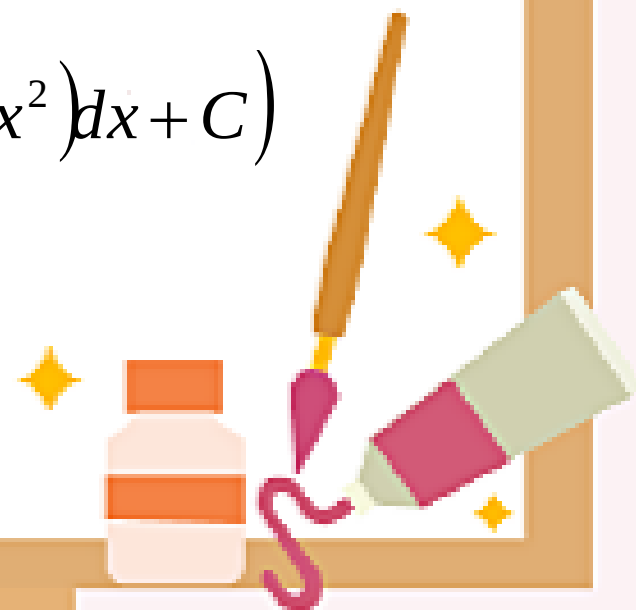
则 $p(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$, $Q(x) = 1+x^2$

所以原方程的通解为

$$y = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(\int e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} (1+x^2) dx + C \right) = e^{\ln(1+x^2)} \left(\int e^{-\ln(1+x^2)} (1+x^2) dx + C \right)$$

$$= (1+x^2) \left(\int \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) dx + C \right) = (1+x^2) \left(\int dx + C \right)$$

$$= (1+x^2)(x+C)$$



例6 求方程 $y' + 3y = e^{-2x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解。

解 由题意可知, $p(x) = 3$, $Q(x) = e^{-2x}$, 根据公式可得方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3dx} \left(\int e^{\int 3dx} e^{-2x} dx + C \right) = e^{-3x} \left(\int e^{3x} e^{-2x} dx + C \right) \\ &= e^{-3x} \left(\int e^x dx + C \right) = e^{-3x} (e^x + C) \end{aligned}$$

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入通解, 得 $C = -1$ 。

所以, 所求的特解为 $y = e^{-2x} - e^{-3x}$

7.3 二阶常系数线性微分方程

形如

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的二阶微分方程，称为**二阶线性微分方程**。其中， $p(x)$, $q(x)$ 及 $f(x)$ 都是自变量的已知函数。

当 $p(x)$, $q(x)$ 为常数时，方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

称为**二阶常系数线性微分方程**， $f(x)$ 称为自由项。当 $f(x) \equiv 0$ 时，

$$y'' + py' + qy = 0$$

称为**二阶常系数齐次线性微分方程**。当 $f(x) \neq 0$ 时，对应的方程称为**二阶常系数非齐次线性微分方程**。

本章内容

01

二阶常系数齐次
线性微分方程

02

二阶常系数非齐次
线性微分方程

7.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程

定理1（二阶齐次线性微分方程通解的结构定理） 若 y_1, y_2 是二阶齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解，即 $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{常数}$ ，则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数})$$

根据求导的经验，我们知道指数函数 $y = e^{rx}$ 的一、二阶导数 re^{rx} ， r^2e^{rx} 仍是同类型的指数函数，如果选取适当的常数 r ，则有可能使 $y = e^{rx}$ 满足方程 $y'' + py' + qy = 0$ 。因此猜想方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解具有形式

$$y = e^{rx}$$

将它代入方程并整理可得 $e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$

由于 $e^{rx} \neq 0$ ，则必有 $r^2 + pr + q = 0$ (7-5)

由此可知，当 r 是一元二次方程 (7-5) 的根时， $y = e^{rx}$ 就是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的一个解。

我们称方程 (7-5) 是微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程，它的根 r_1, r_2 称为**微分方程的特征根**。

由于特征方程 (7-5) 是一元二次方程，它的根为 $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ，
所以特征根 $r_{1,2}$ 就有3种不同的情况，分别讨论如下：

- (1) 当 $p^2 - 4q > 0$ 时， r_1, r_2 是不相等的两个实根；
- (2) 当 $p^2 - 4q = 0$ 时， r_1, r_2 是相等的两个实根；
- (3) 当 $p^2 - 4q < 0$ 时， r_1, r_2 是一对共轭虚根。

1. r_1, r_2 是不相等的两个实根

若 r_1, r_2 是不相等的两个实根，则方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个特解是

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \text{ 且 } \frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{常数}$$

因此，方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数})$$

2. r_1, r_2 是两个相等的两个实根

若 r_1, r_2 是相等的两个实根, 则 $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$, 得到方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的一个特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$ 。为了求通解, 还需求另一个与 y_1 线性无关的解 y_2 。设 $y_2 = C(x)y_1$, 其中, $\frac{y_2}{y_1} = C(x) \neq \text{常数}$, 将其代入方程整理得

$$e^{r_1 x} [C''(x) + (2r_1 + p)C'(x) + (r_1^2 + pr_1 + q)C(x)] = 0$$

因为 $e^{r_1 x} \neq 0$, 是方程 (7-5) 的重根, 故有 $r_1^2 + pr_1 + q = 0, 2r_1 + p = 0$, 因此可得 $C''(x) = 0$ 。

对上式积分两次，得 $C(x) = C_1x + C_2$ (C_1, C_2 为常数)

因为只需找出一个与 y_1 线性无关的特解，也就是找出一个不为常数的 $C(x)$ 即可，所以可令 $C_1 = 1, C_2 = 0$ ，取 $C(x) = x$ ，由此得到方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的另一个解 $y_2 = xe^{r_1x}$ 。

所以，方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{rx} \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数})$$

3. r_1, r_2 是一对共轭虚根

若 r_1, r_2 是一对共轭虚根, 设 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$)。这时, $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$, 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个复数解。由于它们使用起来不方便, 所以可根据欧拉公式

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

将 y_1, y_2 改写为

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ y_2 &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

取方程 $y'' + py' + qy = 0$ 另两个特解为

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

✦ 且 $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \cot \beta x \neq \text{常数}$, 则方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程通解的步骤如下：

- (1) 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ ；
- (2) 求出特征根 r_1, r_2 ；
- (3) 由特征根的情况写出其通解。

例1 求微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的通解。

解

该方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$

解出特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 3$

因为 $r_1 \neq r_2$ ，故所求方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

例2 求微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 的一个特解。

解

所给方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$ ，特征根为 $r_1 = r_2 = 1$ ，所以，
该微分方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入得 $C_1 = 1$ ；对上式求导有

$$y' = (C_1 + C_2 x + C_2)e^x$$

将 $y'|_{x=0}=3$ 代入得 $C_2 = 2$ 。

所以原微分方程的特解为

$$y = (1 + 2x)e^x$$

例3 求微分方程 $y'' - 6y' + 13y = 0$ 的通解。

解

所给方程的特征方程为 $r^2 - 6r + 13 = 0$ ，特征根 $r = 3 \pm 2i$ ，因 $\alpha = 3, \beta = 2$ ，故所给微分方程的通解是

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

7.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

1. 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解结构

定理2 若 y^* 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的一个特解,

Y 是其对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解, 则

$$y = Y + y^*$$

就是方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解。

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的右端 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 其中, λ 是常数, $P_m(x)$ 是一个已知的 x 的 m 次多项式, 则

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x) \quad (7-6)$$

方程 (7-6) 的特解的形式仍然是多项式与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积。

假设 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ 是方程 (7-6) 的特解, 其中, $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式, 其各项系数待定; k 的取值如下:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根时} \\ 1, & \text{当 } \lambda \text{ 是特征单根时} \\ 2, & \text{当 } \lambda \text{ 是特征重根时} \end{cases}$$

故求 y^* 的步骤是: 首先依据条件设出 y^* , 然后将 y^* 代入方程 (7-6) 确定 $Q_m(x)$ 中的 m 个待定系数。这种求 y^* 的方法称为 **待定系数法**。

例4 求微分方程 $y'' + y' - 6y = 3e^{2x}$ 的一个特解。

解 该方程的特征方程为 $r^2 + r - 6 = 0$ ，其特征根为 $r_1 = 2, r_2 = -3$ 。因 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根，故设方程的特解为

$$y^* = axe^{2x}$$

$$\text{则 } y^{*'} = (a + 2ax)e^{2x}, y^{*''} = (4a + 4ax)e^{2x}。$$

代入原方程得 $5ae^{2x} = 3e^{2x}$

即 $5a = 3$ ，解得 $a = \frac{3}{5}$ 。

所以，原方程得一个特解为

$$y^* = \frac{3}{5}xe^{2x}$$

例5 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = (x+1)e^x$ 的一个特解。

解 该方程的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$ ，其特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 3$ 。因 $\lambda = 1$ 不是特征方程的单根，故设方程的特解为

$$y^* = (b_0x + b_1)e^x$$

将 y^* 代入原方程，经化简得

$$-4b_0x - 4b_1 = x + 1$$

比较两边 x 的同次幂系数，得

$$b_0 = -\frac{1}{4}, b_1 = -\frac{1}{4}$$

因此，该方程的特解为

$$y^* = -\frac{1}{4}(x+1)e^x$$

2) $f(x) = A\cos \omega x + B\sin \omega x$ 型

如果方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的右端 $f(x) = A\cos \omega x + B\sin \omega x$, 其中 A, B, ω 为实数, 这时方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 成为

$$y'' + py' + qy = A\cos \omega x + B\sin \omega x \quad (7-7)$$

可以证明, 方程 (7-7) 的特解为 $y^* = x^k (a \cos \omega x + b \sin \omega x)$

其中, a 和 b 是待定常数, k 是整数, 其取值如下:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \omega i \text{ 不是特征根 } r \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } \omega i \text{ 是特征根 } r \text{ 时} \end{cases}$$

例6 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 20\cos 2x$ 的通解。

解 该方程的特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$ ，其特征根为 $r_1 = -1, r_2 = -2$ 。故原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

因 $\omega i = 2i$ 不是特征方程的根，故可设方程的特解为

$$y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$$

将其代入原方程，整理得

$$(-2a + 6b) \cos 2x + (-2b - 6a) \sin 2x = 20 \cos 2x$$

比较系数可得

$$\begin{cases} -2a + 6b = 20 \\ -2b - 6a = 0 \end{cases}$$

解得

$$a = -1, b = 3$$

原方程的特解为

$$y^* = -\cos 2x + 3\sin 2x$$

所以，原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \cos 2x + 3\sin 2x$$

