

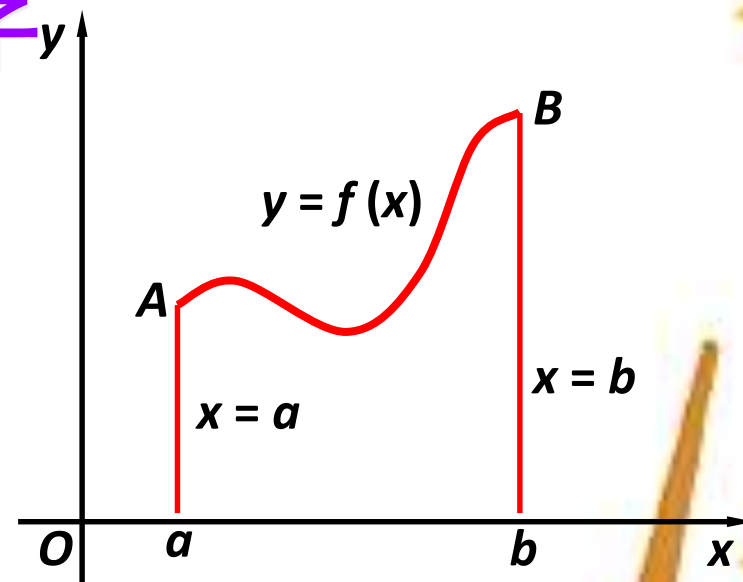
第六章 定积分

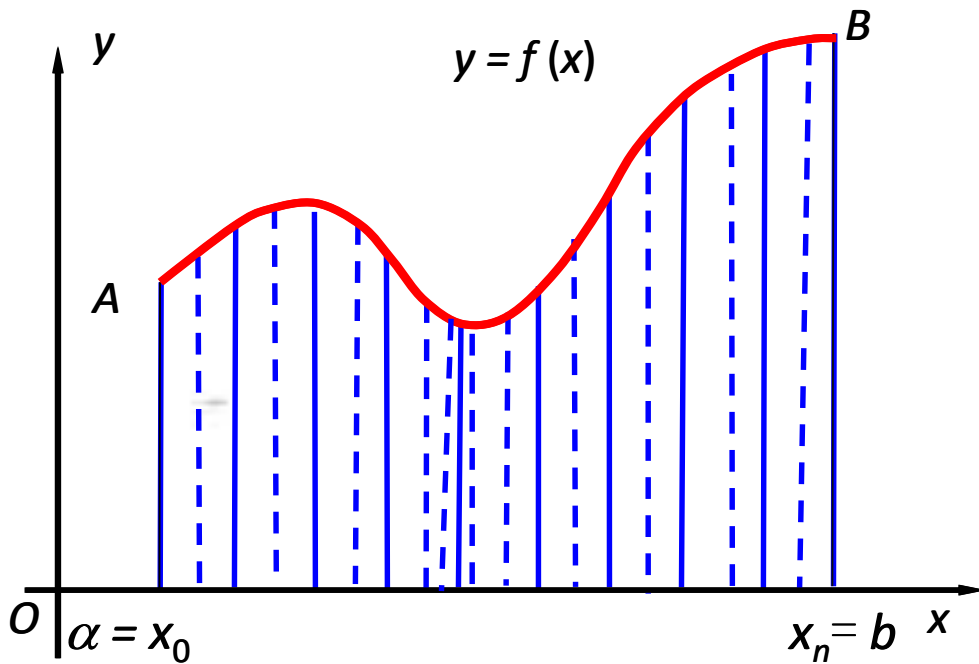
一、引进定积分概念的两个例子

1. 曲边梯形的面积

曲边梯形：在直角坐标系下，由闭区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x) \geq 0$ ，

直线 $x = a$ ， $x = b$ 与 x 轴围成的平面图形 $AabB$.





分割

近似

求和

极限

曹冲称象

以不变代变（以直代曲）、化整为零、积零为整的思想

不积跬步无以至千里

根据以上分析，可按下面四步计算曲边梯形面积.

(1) 分割

在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

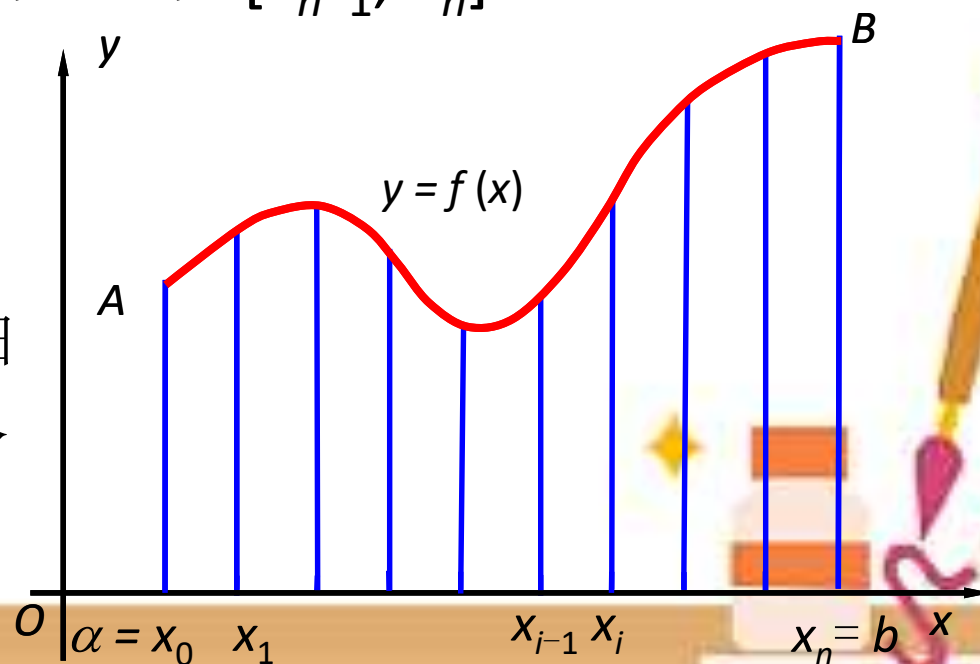
把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

这些小区间的长度分别记为

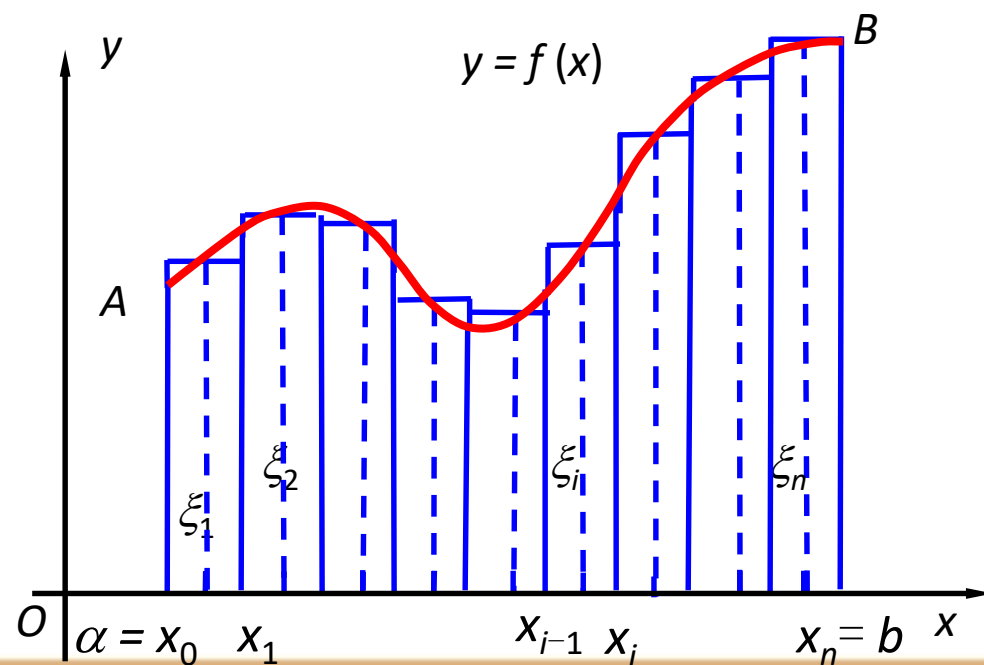
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

过每一分点作平行于 y 轴的直线, 它们把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形.



(2) 近似代替

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 上取一点 ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$), 以 $f(\xi_i)$ 为高, Δx_i 为底作小矩形, 用小矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替相应的小曲边梯形面积 ΔA_i , 即 $\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).



(3) 求和

把 n 个小矩形面积加起来，得和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ，它就是曲边梯形面积的近似值，即

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

(4) 取极限

当分点个数 n 无限增加，且小区间长度的最大值 λ (即 $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$) 趋近于 0 时，上述和式的极限就是曲边梯形面积的精确值，即

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设一物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t)$ 是时间 t 的连续函数, 求在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上物体所经过的路程 s .

(1) 分割 在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小区间:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{i-1}, t_i], \cdots, [t_{n-1}, t_n].$$

这些小区间的长度分别为: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$.

相应的路程 s 被分为 n 段小路程: $\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) 近似代替

在每个小区间上任意取一点 ξ_i ($t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$), 用 ξ_i 点的速度 $v(\xi_i)$ 近似代替物体在小区间上的速度, 用乘积 $v(\xi_i) \Delta t_i$ 近似代替物体在小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上所经过的路程 Δs_i , 即

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(3) 求和

$$s = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i.$$

(4) 取极限

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i.$$

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义. 任意取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 称为子区间, 其长度记为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 任取一点 ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$),

得相应的函数值 $f(\xi_i)$, 作乘积

$$f(\xi_i) \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

把所有乘积加起来，得和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ ，当 n 无限增大，且子区间的最大长度 l (即 $l = \max\{\Delta x_i\}$) 趋于零时，如果上述和式的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，并将此极限值称为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分，

记作
$$\int_a^b f(x)dx,$$

即
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

$f(x)$: 被积函数;

$f(x)dx$: 被积表达式或被积分式;

x : 积分变量;

$[a, b]$: 积分区间;

a 与 b : 积分下限与上限.

符号 $\int_a^b f(x)dx$ 读作函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分.

关于定积分定义的几点说明：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在(即函数 $f(x)$ 可积)是指无论对区间 $[a, b]$ 怎样分法, 也不论对点 ξ_i 怎样取法, 极限都存在且有相同的极限值.

(2) 闭区间上连续函数, 或只有有限个第一类间断点的函数是可积的.

(3) 定积分是和式极限, 仅由函数 $f(x)$ 与区间 $[a, b]$ 确定, 它与积分变量的记号无关, 即
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

(4) 当 $a > b$ 时,
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(t) dx.$$

当 $a = b$ 时, 规定
$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

根据定积分的定义，上面两个例子都可以表示为定积分：

(1) 曲边梯形面积 A 是曲边函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，即

$$A = \int_a^b f(x) dx;$$

(2) 变速直线运动的路程 s 是速度函数 $v(x)$ 在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的定积分，即

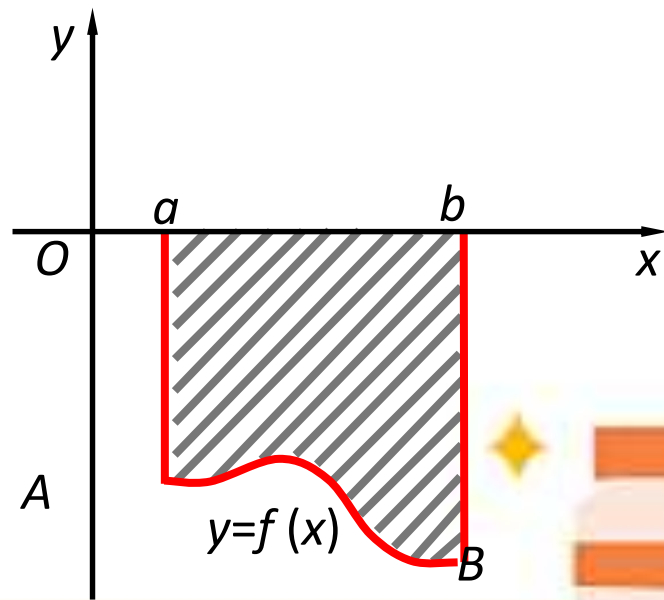
$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

三、定积分的几何意义

当 $f(x) > 0$ 时，定积分在几何上表示曲边 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上方的曲边梯形面积， $\int_a^b f(x) dx = A$.

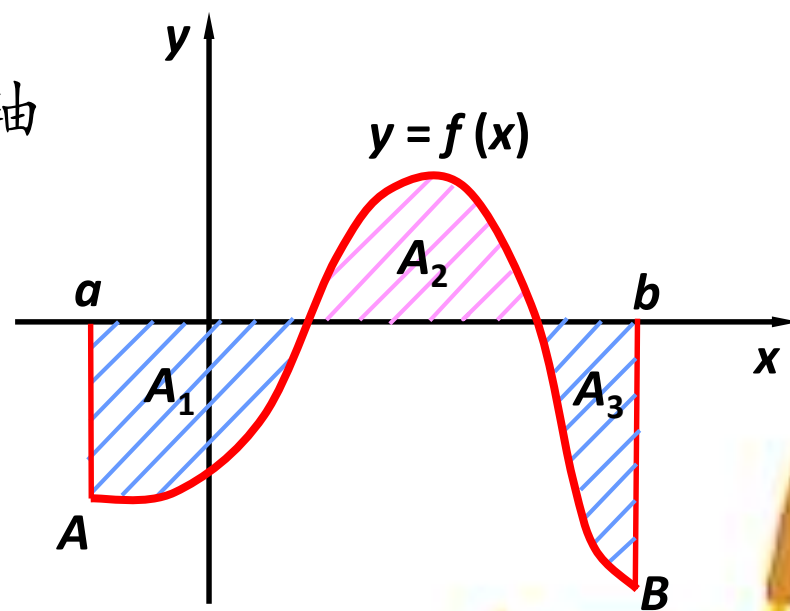
如果 $f(x) < 0$ ，曲边梯形在 x 轴下方，
此时该定积分为负值，
它在几何上表示 x 轴下方
的曲边梯形面积的负值，

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx = -A.$$



当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正有负时, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示 x 轴上方的曲边梯形面积减去 x 轴下方的曲边梯形面积。

$$\int_a^b f(x)dx = -A_1 + A_2 - A_3.$$

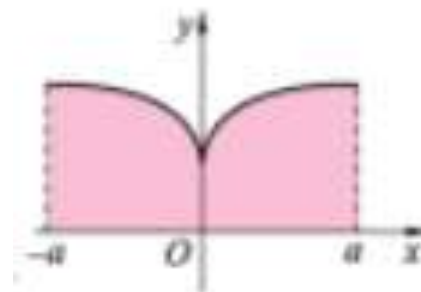
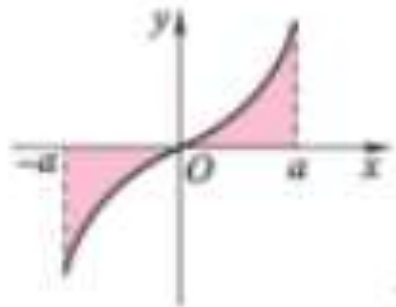
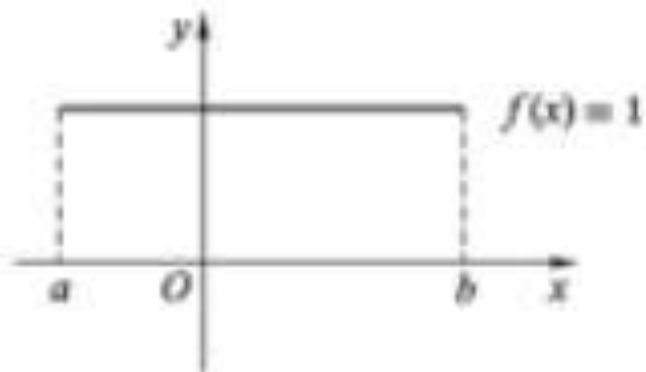


结论1: (1) 当 $a=b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = 0$.

$$(2) \int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a.$$

(3) 函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a, a]$ 上连续, 则有

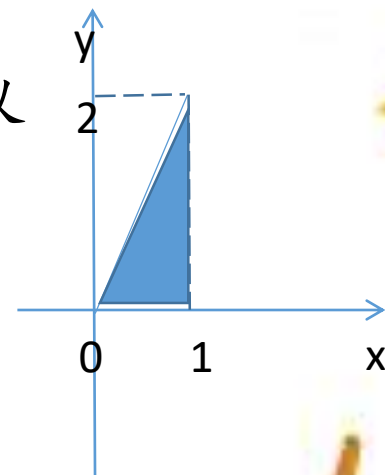
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时.} \end{cases}$$



例1 利用定积分的几何意义, 求 $\int_0^1 2x dx$.

解 $y=2x$ 在 $[0, 1]$ 上组成的曲边梯形是三角形, 由定积分的几何意义

$$\int_0^1 2x dx = \frac{1}{2} * 1 * 2 = 1$$

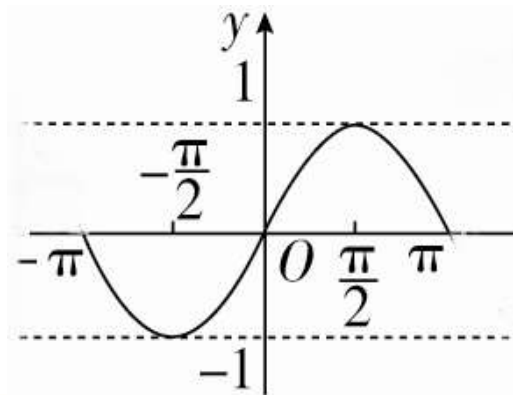


例2 利用上述结论计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ 。

解

因为被积函数 $y = \sin x$ 是奇函数, 且积分区间 $[-\pi, \pi]$ 是对称区间,

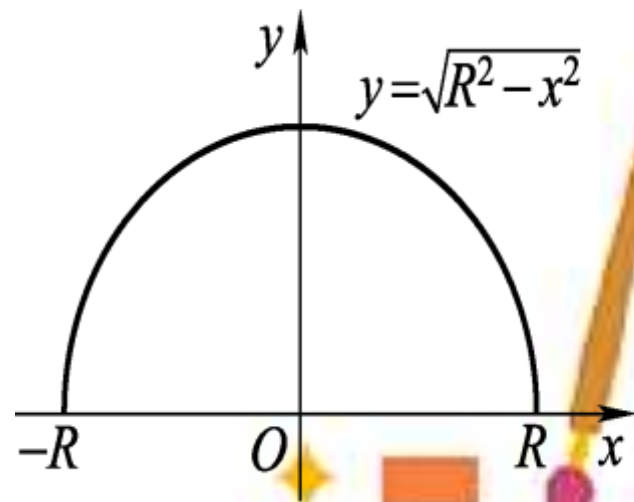
由上述结论可知, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$



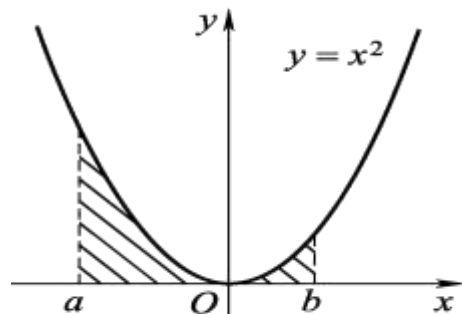
例3 利用定积分的几何意义求下列定积分的值 $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

解 根据定积分的几何意义,该定积分为由曲线 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 及 x 轴所围成图形的面积。即以 R 为半径的二分之一圆的面积,如图所示, 故

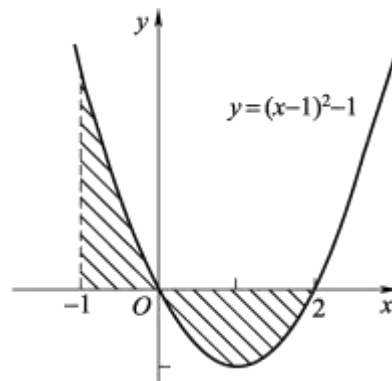
$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi R^2$$



例4 用定积分表示下图所示阴影部分的面积。



(1)



(2)

解 (1) 被积函数 $y = x^2$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且有 $f(x) \geq 0$, 由定积分的几何意义可得阴影部分的面积 $A = \int_a^b x^2 dx$

(2) 被积函数 $f(x) = (x-1)^2 - 1$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 $[-1, 0]$ 上 $f(x) \geq 0$, 在 $[0, 1]$ 上 $f(x) \leq 0$, 定积分的几何意义可得阴影部分的面积

$$A = \int_{-1}^0 [(x-1)^2 - 1] dx - \int_0^2 [(x-1)^2 - 1] dx$$

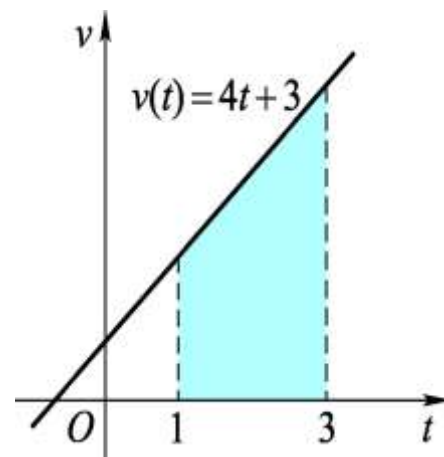
例5 一辆汽车以速度 $v(t)=4t+3$ (m/s) 做直线运动, 试用定积分表示汽车在 $t_1=1$ s 到 $t_2=3$ s 期间所经过的路程 s , 并利用定积分的几何意义求出 s 的值。

解 由定积分的定义, 汽车运行的路程是时间 t 在时间间隔 $[1, 3]$ 上的定积分, 即

$$s = \int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 (4t + 3) dt$$

由定积分的几何意义知, 所求路程 s 的数值等于上底为 $v(1)=4 \times 1 + 3 = 7$ m, 下底为 $v(3)=4 \times 3 + 3 = 15$ m, 高为 2 的直角梯形面积值, 即

$$s = \int_1^3 (4t + 3) dt = \frac{1}{2} (7 + 15) \times (3 - 1) = 22 \text{ (m)}$$



四、定积分的性质

下面各性质中的函数都假设是可积的.

性质1 (1) 两个函数和的定积分等于它们定积分的和, 即

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

可推广到有限多个函数代数和的情况, 即

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x) dx.$$

(2) 被积函数的常数因子可以提到积分外面, 即

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

性质 2 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$, 那么 $\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a$.

性质 3 (积分对区间可加性) 如果积分区间 $[a, b]$ 被点 c 分成两个区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 那么

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

注: 当点 c 不介于 a 与 b 之间, 即 $c < a < b$ 或 $a < b < c$ 时, 结论仍正确.

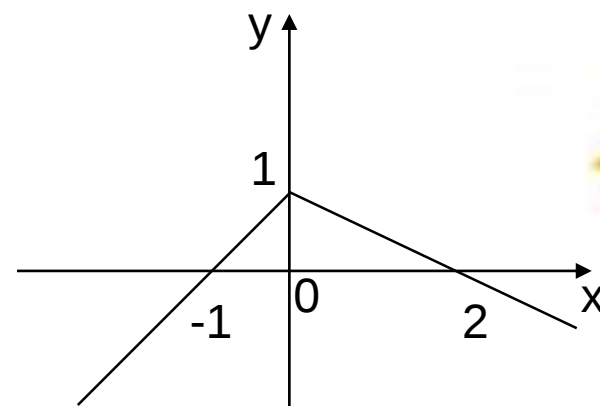
例1 已知 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ 1-\frac{x}{2}, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

解
$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 (1+x)dx + \int_0^2 (1-\frac{x}{2})dx,$$

利用定积分的几何意义，可分别求出

$$\int_{-1}^0 (1+x)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^2 (1-\frac{x}{2})dx = 1,$$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$



性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \leq g(x)$, 那么 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$

推论 $\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$

例 2 比较下列积分值的大小:

1. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$. 2. $\int_0^1 x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x) \mathrm{d}x$.

解 (1) 根据幂函数的性质, 在 $[0, 1]$ 上, $\sqrt{x} \geq x^3$.

由性质 4, 得 $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x \geq \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x;$

2. 比较 $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ 的大小。

(2) 令 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 在区间 $[0, 1]$ 上, 由

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调增加, 所以,

$$f(x) \geq f(0) = [x - \ln(1+x)]|_{x=0} = 0,$$

从而有 $x \geq \ln(1+x)$, 由性质 4, 得

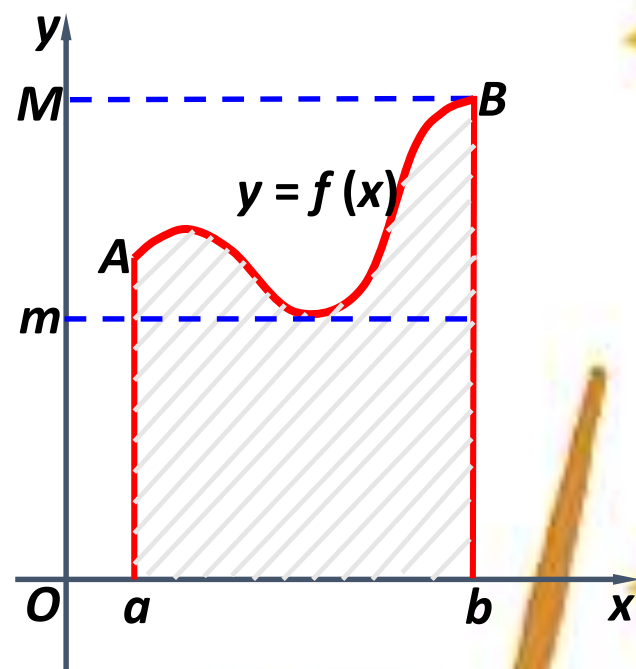
$$\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

性质 5 (估值定理) 如果存在两个数 M, m , 使函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 有 $m \leq f(x) \leq M$, 那么

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

该性质的几何解释是:

曲线 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形面积介于与区间 $[a, b]$ 长度为底, 分别以 m 和 M 为高的两个矩形面积之间.



例 3 估计定积分 $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ 的值.

解 先求 e^{-x^2} 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值,

为此, 求 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 0$.

比较驻点 $x = 0$, 区间端点 $x = \pm 1$ 的函数值,

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f(\pm 1) = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

得最小值 $m = \frac{1}{e}$, 最大值 $M = 1$,

根据估值定理得

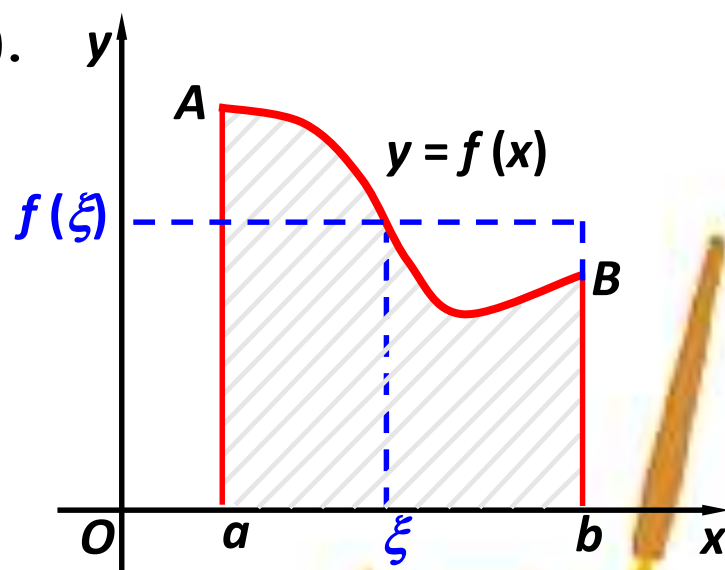
$$\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \leq 2.$$

性质6(积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使下面等式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

该性质的几何解释是:

一条连续曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形面积等于区间 $[a, b]$ 长度为底, $[a, b]$ 中一点 x 的函数值为高的矩形面积。



注: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值。

5.3.1 微积分基本公式

例4 列车进站后必须减速，若列车减速后的速度函数为 $v(t) = 1 - \frac{1}{3}t$ (单位 km/min)，问列车应该在离站台多远的地方减速？

解 列车从开始刹车到停下来所用的时间，也就是列车速度降为零所用的时间。

令 $v(t) = 1 - \frac{1}{3}t = 0$ ，得刹车时间为 $t = 3$ min。

根据定积分的概念，刹车的距离为

$$\Delta S = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{3}t\right) dt$$

由于速度是路程的导数，即 $v(t) = S'(t)$ ，根据不定积分的定义有

$$S(t) = \int v(t) dt = \int \left(1 - \frac{1}{3}t\right) dt = t - \frac{1}{6}t^2 + C$$

由题意可知 $t=0$ 时 $S=0$ ，代入上式得 $C=0$ ，故列车刹车过程中的运动方程为

$$S(t) = t - \frac{1}{6}t^2$$

那么，刹车距离还可以表示为 $\Delta S = S(3) - S(0)$ 。

综合以上可得 $\int_0^3 v(t) dt = S(3) - S(0) = S(3) = \left[t - \frac{1}{6}t^2 \right]_{t=3} = 1.5 \text{ km}$

从这一结果能否推知一般情况：

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$ ， 则有

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

这就是牛顿——莱布尼茨所建立的微分基本公式，它把定积分与原函数联系起来了。

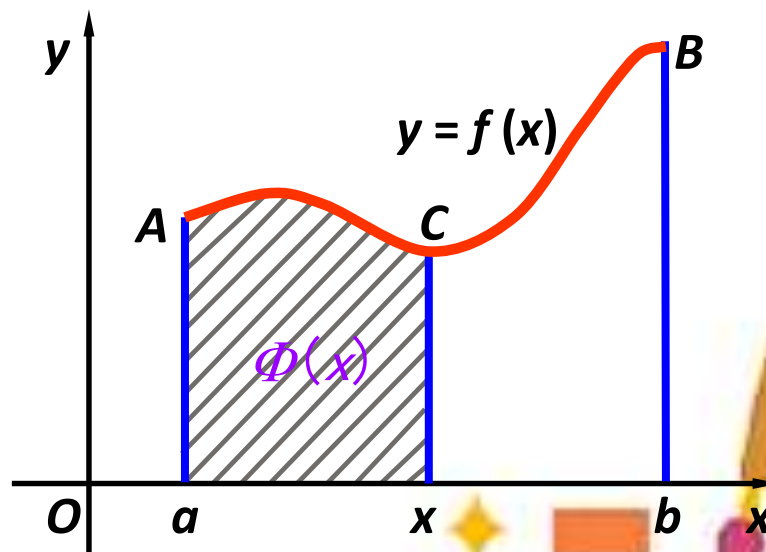
一、变上限定积分

如果 x 是区间 $[a, b]$ 上任意一点, 定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上曲边梯形 $AaxC$ 的面积, 当 x 在区间 $[a, b]$ 上变化时, 表示阴影部分所示的面积。

阴影部分的曲边梯形面积也随之变化,
变上限定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是上限变量 x 的函数.

记作 $\Phi(x)$, 即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b).$$



定理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则变上限定积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 它的导数等于被积函数,

即 $\Phi'(x) = \left[\int_a^x f(t)dt \right]' = f(x).$ **原函数存在定理.**

定理 1 告诉我们:

变上限定积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 这就肯定了连续函数的原函数是存在的。

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

不定积分

定积分

例 1 已知 $\Phi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 求 $\Phi'(x)$.

解 根据定理 1, 得

$$\Phi'(x) = \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' = e^{x^2}.$$

P₁₅₀16. 已知 $\Phi(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, 求 $\Phi'(x)$.

例 2 已知 $F(x) = \int_x^0 \cos(3t+1)dt$, 求 $F'(x)$.

解 这是变下限定积分, 应化为变上限后再用定理 1.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\int_x^0 \cos(3t+1)dt \right]' = \left[-\int_0^x \cos(3t+1)dt \right]' \\ &= -\cos(3x+1). \end{aligned}$$

P₁₅₀17. 已知 $F(x) = \int_x^3 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$, 求 $F'(x)$.

例 3 设 $\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$, 求 $\Phi'(x)$.

解

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt \right)'_x \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt \right)'_{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x.\end{aligned}$$

例 4 设 $y = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \left(\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)'$

$$= \left(\int_x^a \sqrt{1+t^3} dt + \int_a^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)' = \left(\int_x^a \sqrt{1+t^3} dt \right)' + \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)'$$
$$= - \left(\int_a^x \sqrt{1+t^3} dt \right)' + \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)'$$
$$= -\sqrt{1+x^3} + \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)'_{x^2} \cdot (x^2)'_x = -\sqrt{1+x^3} + 2x\sqrt{1+x^6}.$$

 P₁₅₀18. 已知 $G(x) = \int_x^{x^2} t^2 e^{-t} dt$, 求 $G'(x)$.

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt}{x^2}$.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(x^2)^3} (x^2)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^6} = 1. \end{aligned}$$

P₁₅₀. 利用洛必达法则求20、21题。

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2}; \quad 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x}.$$

二、微积分基本公式

定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

此公式称为微积分基本公式, 也称为牛顿—莱布尼茨公式。

公式表明计算定积分分两步:

- (1) 先求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 这就是求不定积分的问题;
- (2) 求这个原函数在积分区间上的增量 $F(b) - F(a)$ 。

例6 求下列定积分:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

解 (1) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x \Big|_0^1 = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$

$$(2) \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

例7 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & 0 \leq x < 1, \\ e^{-x}, & 1 \leq x < 3, \end{cases}$ 计算 $\int_0^3 f(x) dx$.

解
$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx + \int_1^3 e^{-x} dx \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 + (-e^{-x}) \Big|_1^3 = \frac{3}{4} + \frac{e^2 - 1}{e^3}. \end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$.

解 把被积函数化简.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x (1 - \sin^2 x)} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} (-\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} d \sin x \\ &= \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5.6.1 定积分的换元积分法

引例

某地发生了放射性碘物质泄漏事件，检测结果显示，事故发生时，大气辐射水平是可接受最大限度的5倍，已知碘物质放射源辐射水平的衰减规律为

$$R(t) = R_0 e^{-0.003t}$$

其中， $R(t)$ 表示（单位：h）时刻的辐射水平（单位：mR/h）， R_0 表示初始（ $t=0$ ）辐射水平，问：

- （1）该地辐射降低到可接受的辐射水平需要多长时间？
- （2）假设可接受的辐射水平最大限度为0.6 mR/h，那么降低到这一水平时，已经泄露出去的放射物总量是多少？

解 (1) 设需要 t h 才能使该地辐射降低到可接受的辐射水平 $\frac{1}{5}R_0$, 则有

$$R(t) = R_0 e^{-0.003t} = \frac{1}{5}R_0$$

上式解得 $t = 536.4$, 即大概需要 536.4 h。

(2) 若可接受的辐射水平的最大限度为 0.6 mR/h, 则 $\frac{1}{5}R_0 = 0.6$, 解得

$R_0 = 3$, 那么放射源从 $t = 0$ 到降低到可接受的辐射水平 $t = 536.4$ 时泄露的放射物总量为

$$W = \int_0^{536.4} 3e^{-0.003t} dt = 3 \int_0^{536.4} e^{-0.003t} dt$$



定理1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 设函数 $x = \varphi(t)$ 满足下列条件:

- (1) 函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是单调的且具有连续导数 $\varphi'(t)$,
- (2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, 且当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 上变化时, $x = \varphi(t)$ 的值在区间 $[a, b]$ 上变化, 则有:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

上式称为定积分的换元积分公式。

注: 采用换元积分法时, 要相应的改变积分上、下限。

换元必换限

例1 求 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

解 设 $\sqrt{x} = t$, 即 $x = t^2$, 则 $dx = 2t dt$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$;
于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 2 \left[t - \ln |1+t| \right] \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln 3.\end{aligned}$$

例2 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$ 。

解① 设 $u = \cos x$ ，则 $du = -\sin x dx$ ，当 $x = 0$ 时， $u = 1$ ；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $u = 0$ 。于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_1^0 u^3 du = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4} u^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

解②

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\cos^4 \frac{\pi}{2} - \cos^4 0 \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例3 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ 。

解 设 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则 $x = \ln(1 + t^2)$, $dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$ 。当 $x = 0$ 时, $t = 0$;

当 $x = \ln 2$ 时, $t = 1$. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= 2[t - \arctan t] \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

引例中放射源从 $t=0$ 到降低到可接受的辐射水平 $t = 536.4$ 时泄露的放射物总量

$$\begin{aligned} W &= 3 \int_0^{536.4} e^{-0.003t} dt = \frac{3}{-0.003} \int_0^{536.4} e^{-0.003t} d(-0.003t) \\ &= -1000 e^{-0.003t} \Big|_0^{536.4} \approx 799.5(mR) \end{aligned}$$

例4 计算 $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

解 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$,

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt \\&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(4t)] dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

例 5 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a, a]$ 上连续, 求证:

$$(1) \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx ;$$

$$(2) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时.} \end{cases}$$

证明

(1) 由区间的可加性, 可得

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \quad ①$$

对①式右端第一个积分用换元积分法,

令 $x = -t$, 则 $dx = -dt$, $\begin{array}{c|cc} x & -a & 0 \\ \hline t & a & 0 \end{array}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx &= \int_a^0 f(-t)(-dt) \\ &= \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx. \end{aligned} \quad ②$$

把 ② 式代入 ① 式中, 得

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx; \end{aligned}$$

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$, 得

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) \mathrm{d}x &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^a [f(x) + f(x)] \mathrm{d}x = 2 \int_0^a f(x) \mathrm{d}x;\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 是奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$, 得

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) \mathrm{d}x &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^a [f(x) - f(x)] \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_{-a}^a f(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时,} \\ 2 \int_0^a f(x) \mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时.} \end{cases}$$

例6 求下列定积分： (1) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} dx$; (2) $\int_{-1}^1 \left(\sin 3x \cdot \tan^2 x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + x^2 \right) dx$

解 (1) 因为被积函数 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^4}$ 是奇函数，且积分区间 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 是对称区间，所以

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} dx = 0$$

(2) 因为 $\sin 3x \cdot \tan^2 x$ 和 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 都是奇函数， x^2 是偶函数，所以

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\sin 3x \cdot \tan^2 x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x^2 \right) dx &= \int_{-1}^1 \sin 3x \cdot \tan^2 x dx + \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

例 7 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

证 根据三角函数关系 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $dx = -dt$,

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right](-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.\end{aligned}$$

注: 当 $f(\sin x) = \sin^n x$ 时, n 为正整数, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

5.6.2 定积分的分部积分法

例8 科学预测一个新开发的天然气新井在开采后第 t 年的产量为 $P(t) = 8.49 \times 10^6 te^{-t}$ (单位: m^3) , 试求该天然气新井前4年开采的总产量是多少?

解 利用定积分求解问题的方法, 在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内, 天然气的产量为

$$dP = P(t)dt$$

所以该新井前4年的总产量为

$$P = \int_0^4 P(t)dt = \int_0^4 8.49 \times 10^6 te^{-t} dt = 8.49 \times 10^6 \int_0^4 te^{-t} dt$$



定理2 若 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续导数, 则有

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

上式称为定积分的分部积分公式。

口诀：指三幂对反

例9 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx$.

解 根据定积分的分部积分公式得

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx &= (x \arctan x) \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x d(\arctan x) \\&= \sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx \\&= \sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} d(x^2+1) \\&= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2.\end{aligned}$$

思考:

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = ?$$

例10 计算 $\int_0^1 x e^x dx$.

解
$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d(e^x) = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

例11 计算 $\int_1^2 x \ln x dx$.

解 根据定积分的分部积分公式得

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left[(x^2 \ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x^2 d(\ln x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

例8 该新井前4年的总产量为

$$\begin{aligned} P &= 8.49 \times 10^6 \int_0^4 te^{-t} dt \\ &= -8.49 \times 10^6 \int_0^4 te^{-t} d(-t) \\ &= -8.49 \times 10^6 \int_0^4 td(e^{-t}) \\ &= -8.49 \times 10^6 [(te^{-t}) \Big|_0^4 - \int_0^4 e^{-t} dt] \\ &= -8.49 \times 10^6 [4e^{-4} + \int_0^4 e^{-t} d(-t)] \\ &= -8.49 \times 10^6 (4e^{-4} + e^{-t} \Big|_0^4) \\ &\approx 7.7 \div 10^6 (m^3). \end{aligned}$$

例12 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d(\sin x) = \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(x^2) \\&= \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos x) \\&= \frac{\pi^2}{4} + 2 \left(\left[x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) \\&= \frac{\pi^2}{4} + 2 \left(0 - \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\&= \frac{\pi^2}{4} - 2.\end{aligned}$$

注：只要符合分部积分法的条件，可多次使用分部积分法。

例13 求 $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$ 。

解 先用换元法, 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$ 。当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = \frac{\pi^2}{4}$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$ 。于是

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

再对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ 进行分部积分, 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d \cos t = -t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 0 + \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2$$

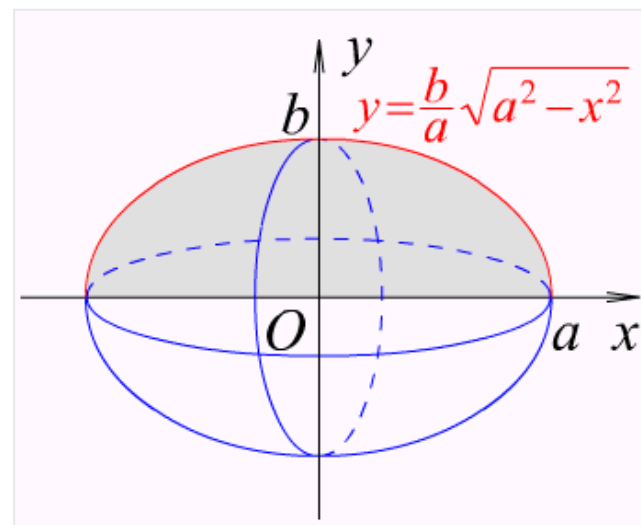
注: 在同一题目中可根据需要使用牛莱公式、换元积分法、分部积分法。

例6 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所成的图形绕y轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解 旋转椭球体可以看作是由半个椭圆 $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ 及x轴围成的图形绕y轴旋转而成的立体. 旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy \\ &= \frac{a^2 \pi}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b. \end{aligned}$$

思考: 椭圆分别绕长轴和短轴旋转, 得到的旋转体的体积大小关系如何?



例7 求由曲线 $y^2 = x$ 与 $y = x$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

解 如图所示，选 x 为积分变量，则 $x \in [0, 1]$ ，

则该立体的体积为两个旋转体体积之差，

故所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

