

定积分的应用

第一节 定积分的微元法

用定积分表示一个量，如几何量、物理量或其他的量，一般分四步考虑，我们来回顾一下解决曲边梯形面积的过程。

第一步**分割**：将区间 $[a, b]$ 任意分为 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ ，其中 $x_0 = a, x_n = b$ 。

第二步取**近似**：在任意一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，
任取一点 ξ_i ，作小曲边梯形面积 ΔA_i 的近似值，

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i.$$

第三步**求和**：曲边梯形面积 $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$

第四步**取极限**： $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0,$

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

第二步取近似时其形式 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ，与第四步积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中的被积分式 $f(x)dx$ 具有类同的形式，如果把第二步中的 ξ_i 用 x 替代， Δx_i 用 dx 替代，那么它就是第四步积分中的被积分式。

基于此，我们把上述四步简化为两步：

第一步选取积分变量，例如选取 x ，并确定其范围，例如 $x \in [a, b]$ ，在其上任取一个子区间记作 $[x, x + dx]$ 。

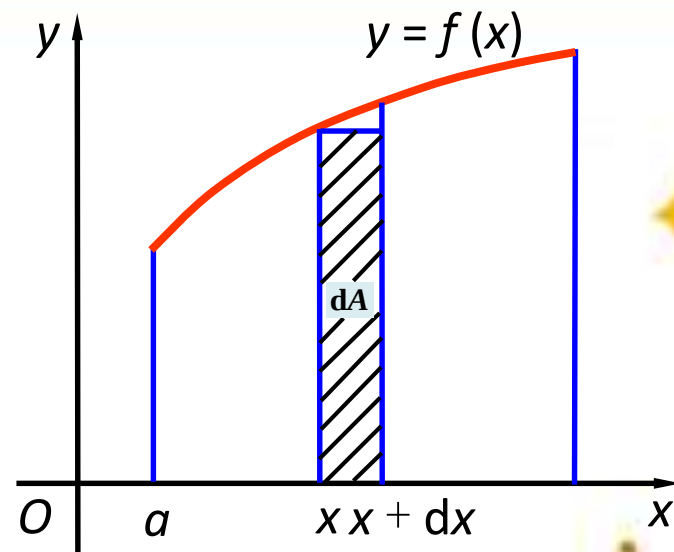
第二步取所求量 F 在子区间 $[x, x + dx]$ 上的部分量 ΔF 的近似值， $\Delta F \approx f(x)dx = dF$ ， dF 称为量 F 的 **微元**。

第三步：将微元 $dF = f(x)dx$ 在区间 $[a, b]$ 上积分(无限累加)，

得 $F = \int_a^b f(x)dx$ 。 **定积分的微元法。**

两点说明：

(1) 取近似值时，得到的是 $f(x)dx$ 那样形式的近似值，并且要求 $\Delta F - f(x)dx$ 是 dx 的高阶无穷小量，关于后一个要求在实际问题中常常能满足。



(2) 具体怎样求微元呢？这是问题的关键，要分析实际意义及数量关系，一般按着在局部 $[x, x+dx]$ 上，以“常带变”“匀带不匀”“直带曲”的思路写出局部上所求量的近似值，即为微元

$$dF = f(x)dx.$$

用微元法计算的量F的特点：

(1) 所求量F与给定区间[a,b]有关，且在该区间上具有**可加性**. 即：F是确定于[a,b]上的整体量，当把[a,b]分成许多小区间时，有

$$F = \sum_{i=1}^n F_i$$

(2) 所求量F在[a,b]上**分布是不均匀的**，即：F的值与区间[a,b]的长不成正比。

如：曲边梯形面积、旋转体体积、变力做功，液体压力.....

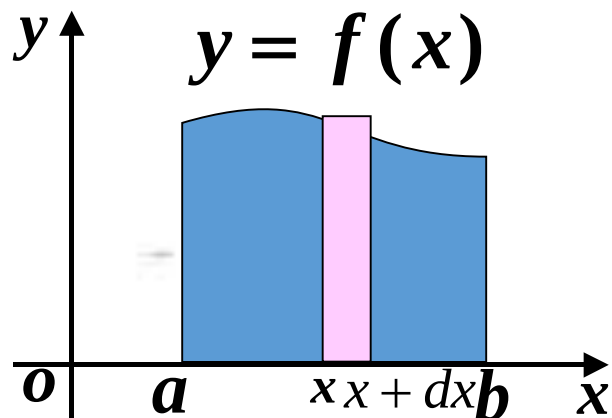
第二节 平面图形的面积

一、直角坐标系中的平面图形的面积

二、极坐标系中平面图形的面积

定积分在几何上的应用

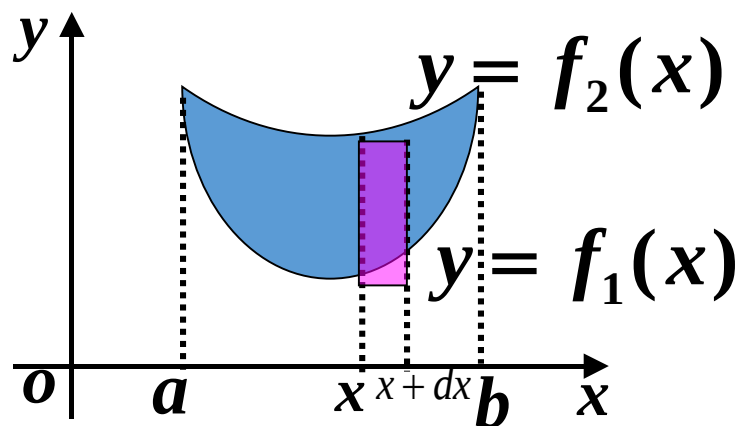
1. 平面图形的面积



面积微元: $dA = f(x)dx$

阴影部分面积

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



$$dA = [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

平面图形的面积

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

例1 计算由两条抛物线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 所围成图形的面积。

解 解方程组 $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases}$ 确定图形所在的范围,

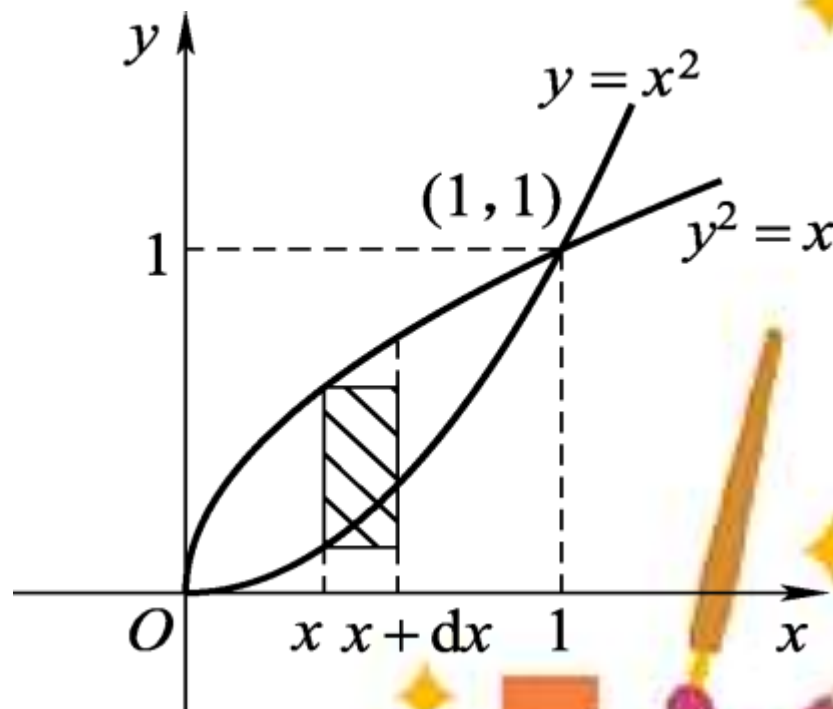
得交点坐标为 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$,

取 x 为积分变量, 积分区间为 $[0, 1]$,

得面积元素 $dS = (\sqrt{x} - x^2)dx$

所求面积为

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



小结

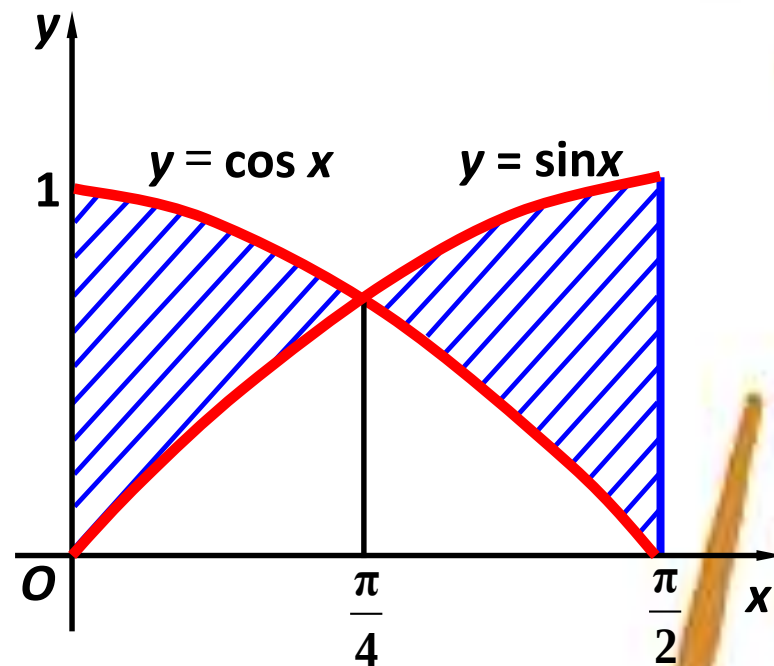
微元法求面积的步骤：

- 1、绘出欲求面积的图形；
- 2、选择积分变量 x ；
- 3、求出图形边界曲线的交点，确定各积分区间；
- 4、写出面积的微元；
- 5、计算积分。

例 2 求 $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形的面积.

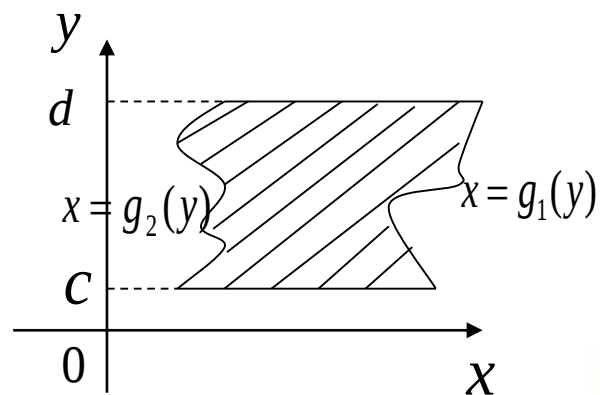
解 作出平面图形的草图, 所求平面图形面积

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= [\cos x + \sin x] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$



在 $[c, d]$ 上 $g_1(y) \geq g_2(y)$ (如下图), 由连续曲线 $x = g_1(y)$ 、 $x = g_2(y)$ 及两条直线 $y = c$ 、 $y = d$ 所围成的封闭图形的面积

$$S = \int_c^d [g_1(y) - g_2(y)] dy$$



例 3 求出抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的平面图形的面积.

解

解方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$ 得交点 $A(2, -2)$ 和 $B(8, 4)$.

作草图, 选择 y 作积分变量, $y \in [-2, 4]$,

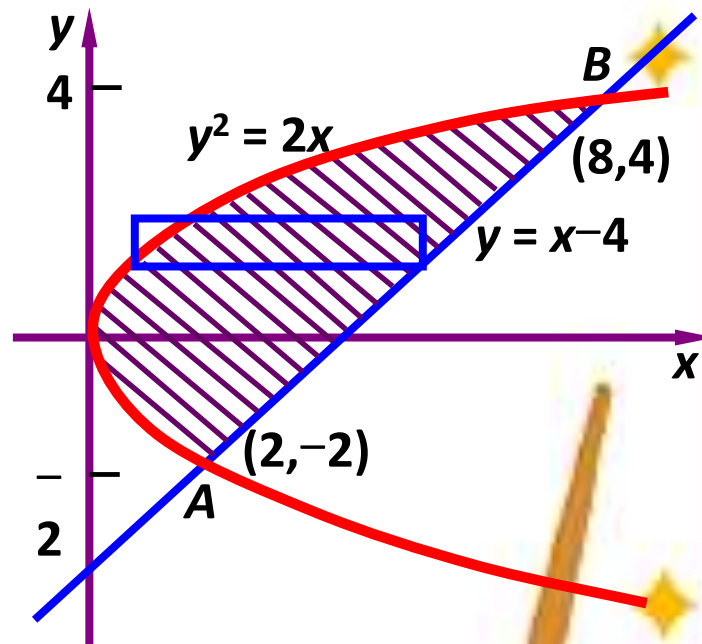
则在 $[y, y+dy]$ 上的面积微元

$$dA = [(y+4) - \frac{y^2}{2}] dy$$

所求平面图形的面积为

$$A = \int_{-2}^4 [(y+4) - \frac{y^2}{2}] dy = \left[\frac{1}{2} y^2 + 4y - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_{-2}^4 = 18.$$

思考: 如果选择 x 为积分变量, 如何求平面图形的面积?



小结

微元法求面积的步骤：

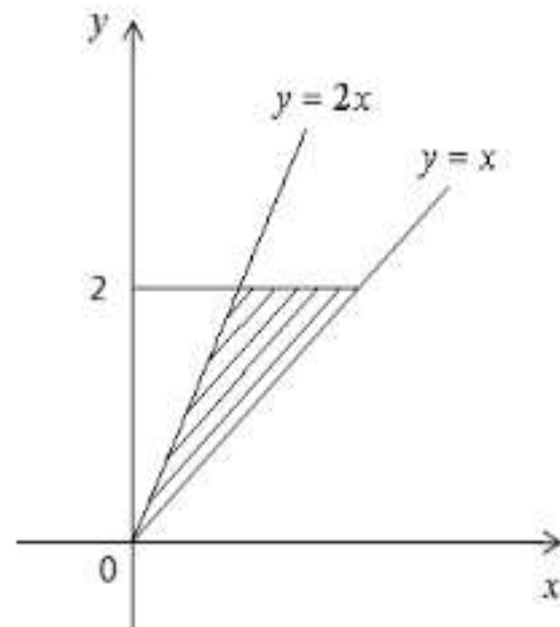
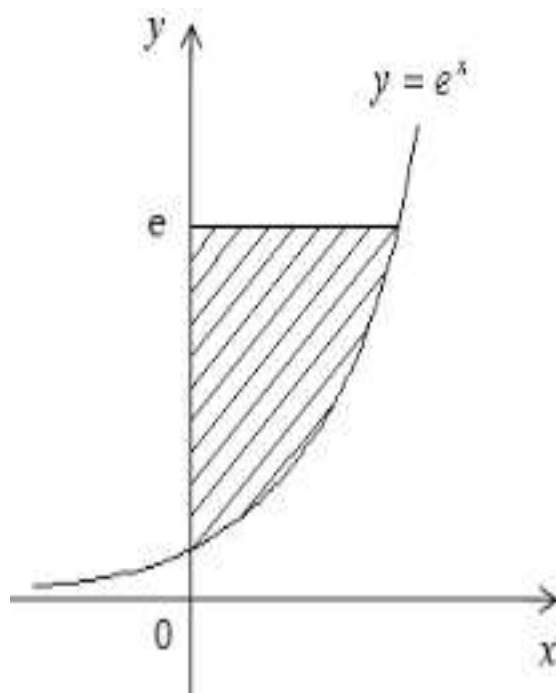
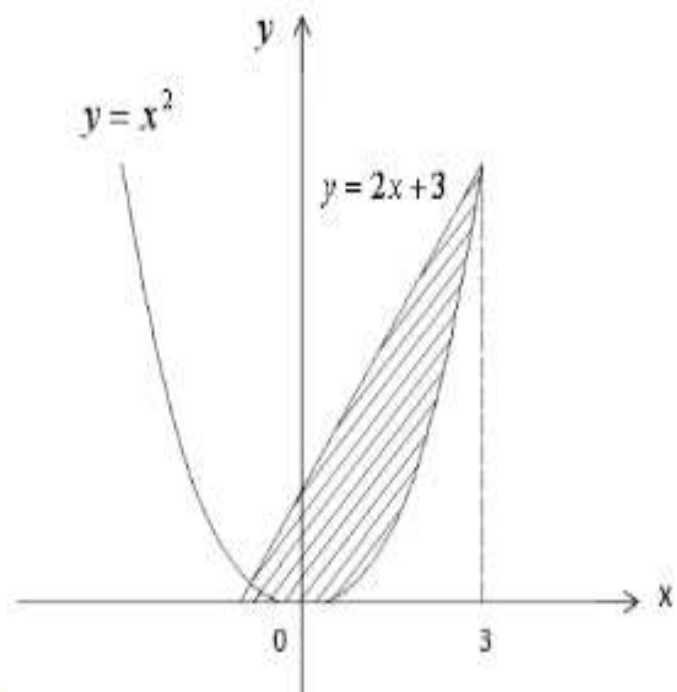
- 1、绘出欲求面积的图形；
- 2、选择积分变量 x 或 y ；**
- 3、求出图形边界曲线的交点，确定各积分区间；
- 4、写出面积的微元；
- 5、计算积分。

口诀

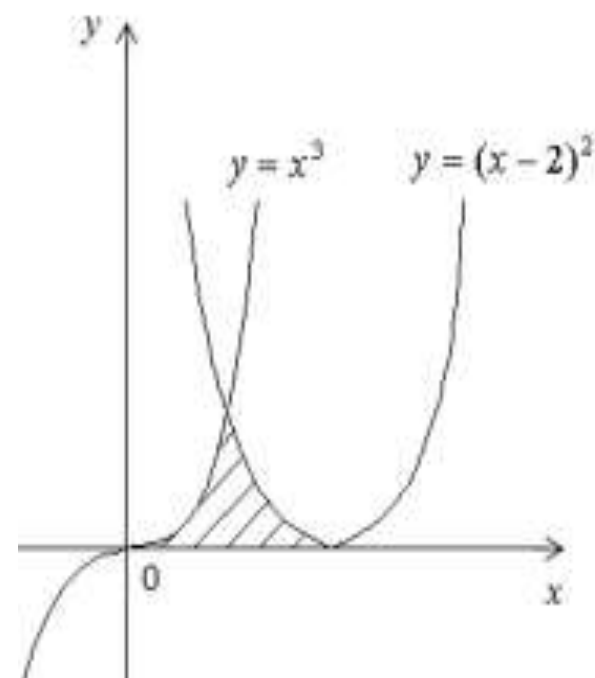
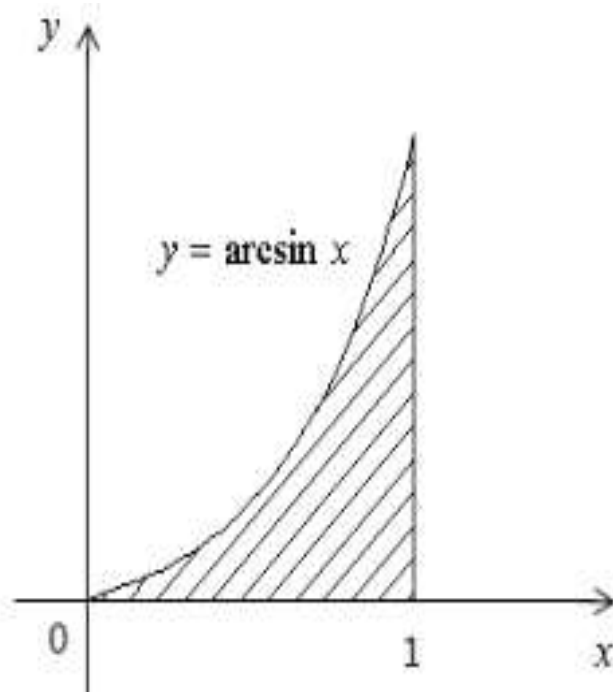
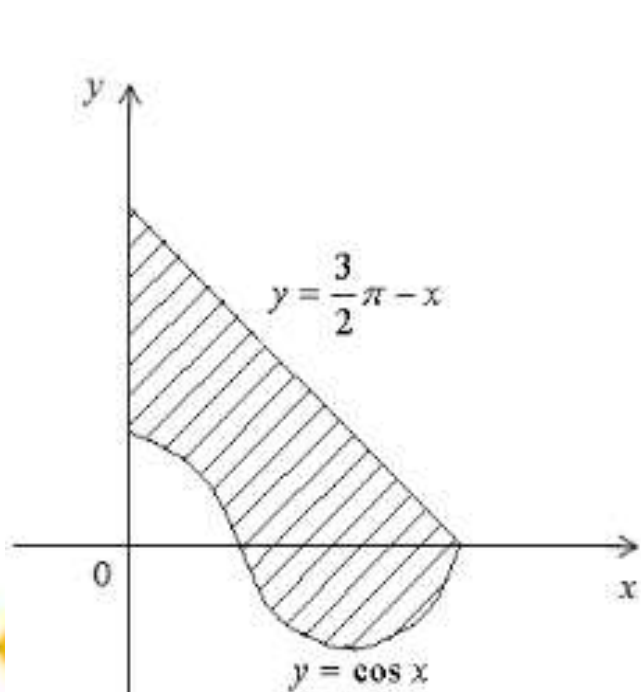
变量先定限	限内划条线
先交写下限	后交写上限



选择恰当的积分变量把下图阴影部分的面积表示为积分式。



选择恰当的积分变量把下图阴影部分的面积表示为积分式。



例 4 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积, 其中 $a > 0, b > 0$.

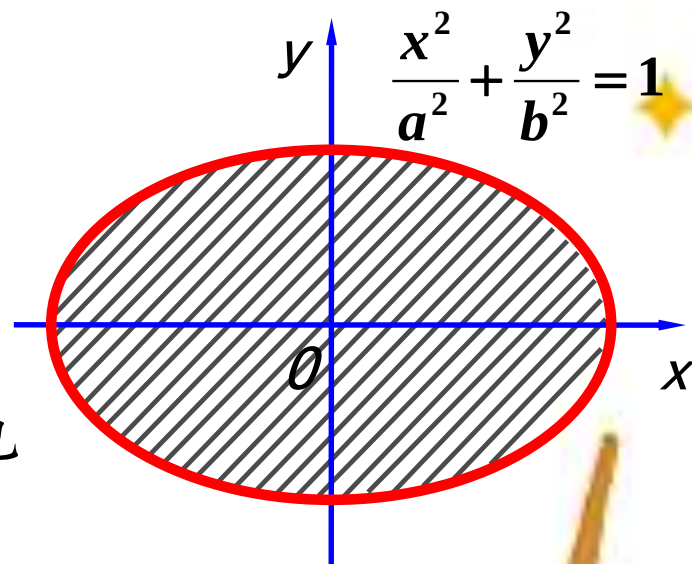
解 因为图形关于 x 轴、 y 轴对称, 所以椭圆面积是它在第一象限部分的面积的四倍, 即

$$A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

令 $x = a \cos t$, 代入上述积分式中, 上、下限也要相应地变换(满足积分变量 t).

由定积分的换元公式得

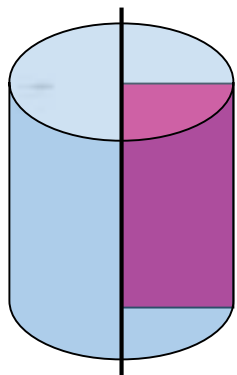
$$A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi ab.$$



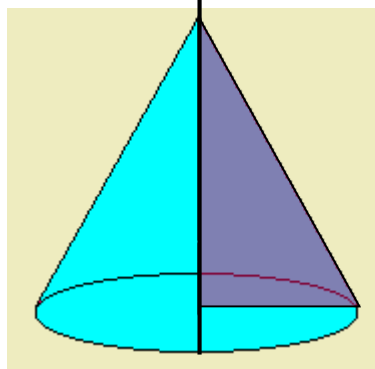
2. 空间立体的体积

1) 旋转体的体积

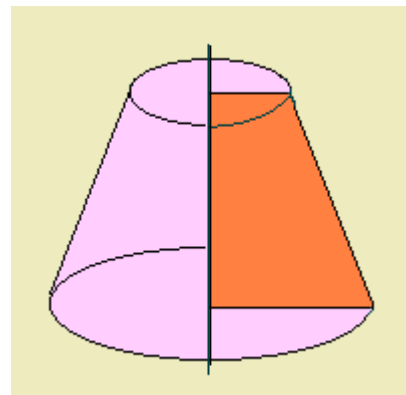
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。这直线叫做**旋转轴**。



圆柱



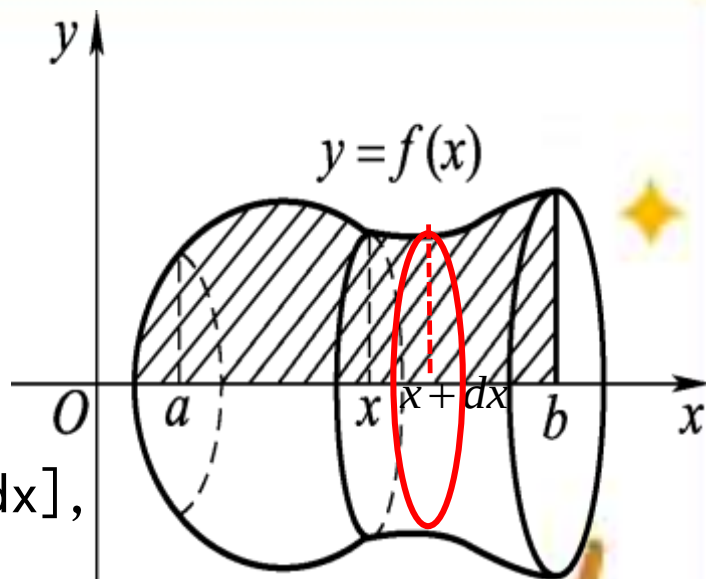
圆锥



圆台



若一旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$ 直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕轴旋转一周而成的, 如图所示, 求它的体积。



取 x 为积分变量, $x \in [a, b]$, 在 $[a, b]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$,

取以 dx 为底的窄边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片体积为体积微元,

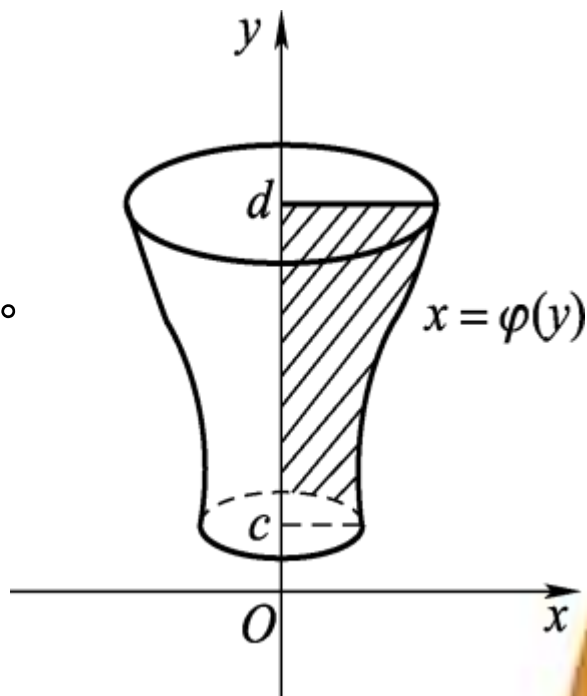
$$dV = \pi [f(x)]^2 dx$$

从而所求体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

若旋转体是由连续曲线 $x = \varphi(y)$ 与直线 $y = c, y = d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的，如图所示。同理可求得其体积为

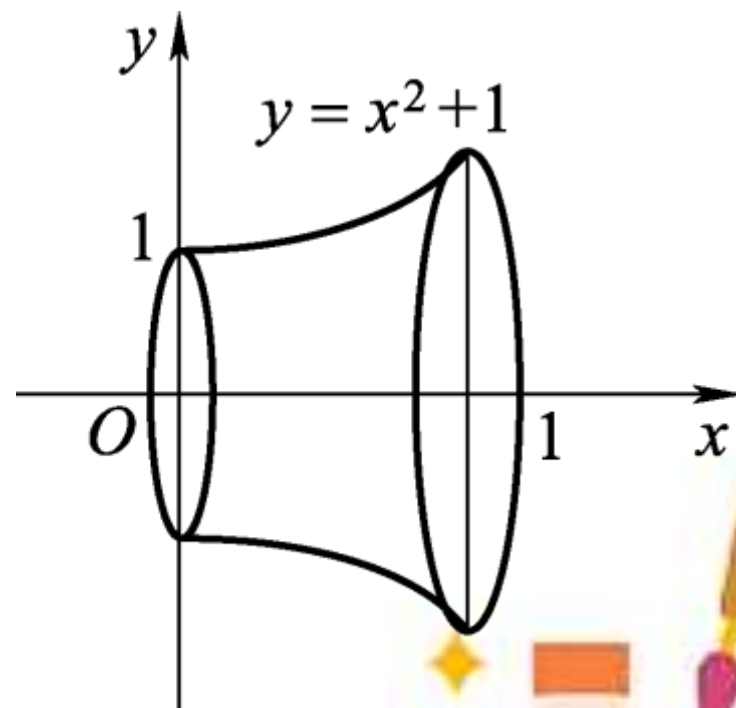
$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$$



例5 求由 $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$ 所围平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 如图所示, 选x为积分变量, 则 $x \in [0, 1]$,
所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{28}{15} \pi. \end{aligned}$$

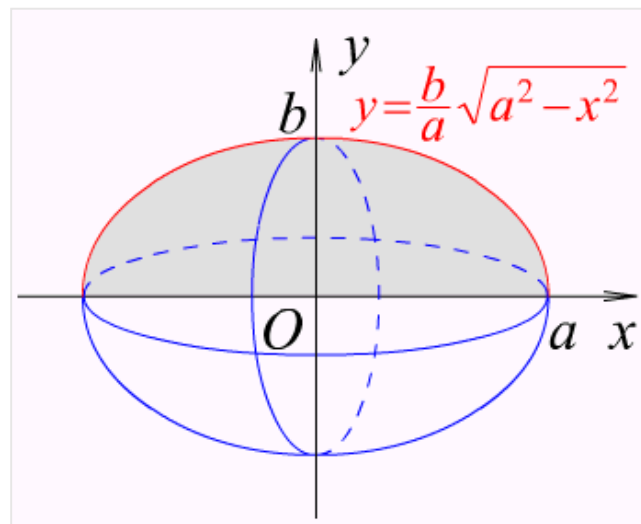


例6 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所成的图形绕y轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解 旋转椭球体可以看作是由半个椭圆 $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ 及x轴围成的图形绕y轴旋转而成的立体. 旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy \\ &= \frac{a^2 \pi}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b. \end{aligned}$$

思考: 椭圆分别绕长轴和短轴旋转, 得到的旋转体的体积大小关系如何?



例7 求由曲线 $y^2 = x$ 与 $y = x$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

解 如图所示，选 x 为积分变量，则 $x \in [0, 1]$ ，

则该立体的体积为两个旋转体体积之差，

故所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

