

4.1.1 原函数和不定积分的概念

例1 已知物体以速度 $v = 2t^2 + 1$ (m/s)沿Ox轴作直线运动，当 $t = 1$ s 时，物体经过的路程为3 m，求物体的运动方程。

$$s'(t) = v(t) = 2t$$

$$s(t) = t^2$$

定义1 设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的已知函数，若存在函数 $F(x)$ ，对于区间 I 上任意一点 x 都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

$(\sin x)' = \cos x$ 则称函数 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数。

思考：（1）所有函数都有原函数吗？

不是，超越函数、狄里克雷函数等分段函数没有。

（2）如果函数有原函数，有多少个原函数？

定理 (原函数族定理)

如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 有无穷多个原函数，且 $F(x) + C$ （是任意常数）是 $f(x)$ 的全体原函数。

（3）哪类函数一定有原函数？

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在某个区间上连续，则函数 $f(x)$ 的原函数一定存在。

定义2 函数 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x) + C$ (C 是任意常数) 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中, “ $\int$ ” 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, C 称为积分常数。

若 $F'(x) = f(x)$, 则有 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 。

例1 求 $\int x^2 dx$ 。

解 由于 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ ，所以， $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数，因此

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

例2 求 $\int \sin x dx$ 。

解 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 。



例3 求 $\int \frac{1}{x} dx$ ($x \neq 0$) 。

解 当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 则 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ 。

当 $x < 0$ 时, $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ 则 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$ 。

所以

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$$

不定积分与导数（或微分）之间有如下运算关系：

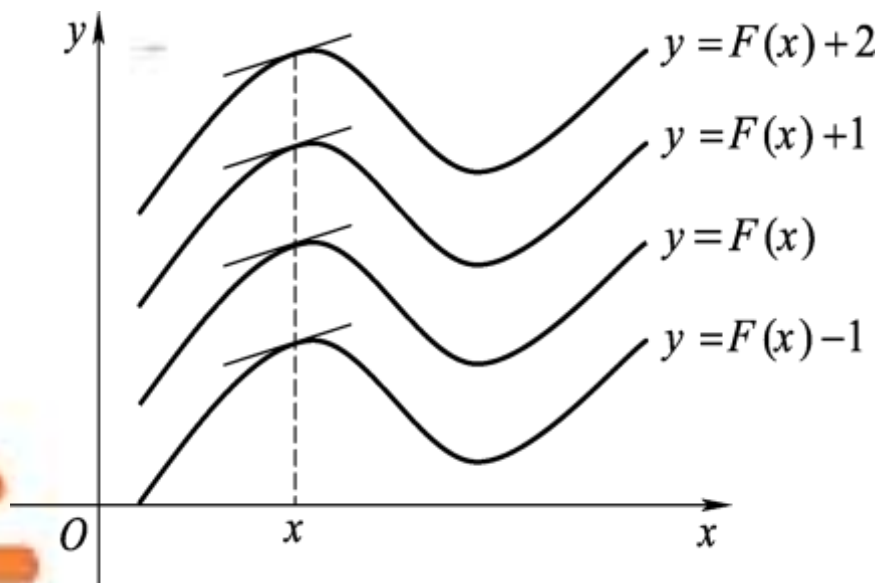
$$(1) \left[\int f(x) dx \right]' = f(x) \text{ 或 } d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C。$$

此关系概括为“先积后微形不变，先微后积多一常数”。由此可见，求不定积分的运算（简称积分运算）与求导（微分）运算是互逆的。例如， $[\int 2x dx]' = 2x$ ， $\int dx^2 = x^2 + C$ 。

4.1.2 不定积分的几何意义

当积分常数 C 取不同值时，不定积分表示的不是一个函数，而是一族函数。从几何上看，它们代表一族曲线，称为函数 $f(x)$ 的积分曲线族，如图所示。



(1) 积分曲线族中所有的曲线都可以由其中任意一条曲线沿着轴的方向上下平移得到；

(2) 对应同一横坐标 x 的点，其所有切线互相平行。

5.1.3 基本积分公式

$$(1) \int k dx = kx + C ; \quad (2) \int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1) ; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C ;$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C ;$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C ;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C ;$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C ;$$

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C ;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C ;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C ;$$

$$(12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C ;$$

$$(13) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C .$$

不定积分的运算法则：

(1) 被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0)$$

(2) 两个函数代数和的不定积分等于这两个函数不定积分的代数和，即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x) dx$$

注：可推广至多个函数混合运算。

例4 求 $\int \left(x^2 + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ 。

解

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \int x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \cos x - \arctan x + C \end{aligned}$$

例5 求 $\int \sqrt{x}(x^2 - 5) dx$ 。

解

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}(x^2 - 5) dx &= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

例6 求 $\int 2^x e^x dx$ 。

解

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{(2e)^x}{1 + \ln 2} + C$$

例7 求 $\int \frac{(1-x)^2}{x} dx$ 。

解

$$\int \frac{(1-x)^2}{x} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2 + x \right) dx = \ln |x| - 2x + \frac{1}{2} x^2 + C$$

例8 求 $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$ 。

解
$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

例9 求 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ 。

二倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 故 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ 。

解
$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

例10 已知物体以速度 $v = 2t^2 + 1$ (m/s) 沿 Ox 轴作直线运动，当 $t = 1$ s 时，物体经过的路程为 3 m，求物体的运动方程。

解 设物体的运动方程为 $x = x(t)$ ，于是有 $x'(t) = v = 2t^2 + 1$ ，所以

$$x(t) = \int (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

将已知条件 $t = 1$ s 时， $x = 3$ m，代入上式有

$$3 = \frac{2}{3} + 1 + C$$

即

$$C = \frac{4}{3}$$

于是，所求物体的运动方程为 $x(t) = \frac{2}{3}t^3 + t + \frac{4}{3}$ 。

例11 若某池塘结冰的速度为 $\frac{dy}{dt} = k\sqrt{t}$, 其中 y (单位: 厘米) 表示冰的厚度, t (单位: 小时) 表示时间, k 为正常数。当 $t=0$ 时池塘开始结冰, 求结冰厚度 y 时间 t 的函数关系。

解 已知 $\frac{dy}{dt} = k\sqrt{t}$, 求不定积分得

$$y(t) = \int k\sqrt{t} dt = k \int \sqrt{t} dt = k \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

由于 $t=0$ 时 $y=0$, 代入上式得 $C=0$, 所以, 结冰厚度 y 与时间 t 的函数关系为

$$y(t) = k \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

常用公式

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

平方关系

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases}$$

倒数关系

$$\begin{cases} \tan x \cdot \cot x = 1 \\ \sin x \cdot \csc x = 1 \\ \cos x \cdot \sec x = 1 \end{cases}$$

商数关系

$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

4.4.1 不定积分的换元积分法

1. 第一类换元积分法

定理1（第一换元积分法） 设函数 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$ ，且 $u = \varphi(x)$ 可导，则函数 $F[\varphi(x)]$ 是函数 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数，即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

这个公式称为第一类换元积分法，也称为凑微分法。

例1 求 $\int \sin 5x dx$ 。

解 将 dx 进行配凑，因为 $dx = \frac{1}{5}d(5x)$ ，所以

$$\int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) \xrightarrow{u=5x} \frac{1}{5} \int \sin u du = -\frac{1}{5} \cos u + C \xrightarrow{\text{还原}} -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

思路： $dx = \frac{1}{a}d(ax) \ (a \neq 0)$

例2 求 $\int (1+2x)^3 dx$ 。

解 将 dx 进行配凑，因为 $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(1+2x)$ ，所以

$$\begin{aligned}\int (1+2x)^3 dx &= \int \frac{1}{2}(1+2x)^3 d(1+2x) = \frac{1}{2} \int (1+2x)^3 d(1+2x) \\ &\stackrel{u=1+2x}{=} \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C \stackrel{\text{还原}}{=} \frac{1}{8} (1+2x)^4 + C\end{aligned}$$

思路： $dx = \frac{1}{a} d(ax+b) \quad (a \neq 0)$

例3 求 $\int x\sqrt{4-x^2}dx$ 。

解 将 dx 进行配凑，因为 $xdx = \frac{1}{2}dx^2 = -\frac{1}{2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}d(4-x^2)$ ，所以

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4-x^2}dx &= \int x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int(4-x^2)^{\frac{1}{2}}d(4-x^2) \\ &\stackrel{u=4-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \stackrel{\text{还原}}{=} -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

例4 求 $\int xe^{x^2} dx$ 。

解 将 dx 进行配凑，因为 $x dx = \frac{1}{2} dx^2$ ，所以

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 \stackrel{u=x^2}{=} \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C \stackrel{\text{还原}}{=} \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$(1) \, dx = \frac{1}{a} d(ax + b);$$

$$(2) \, xdx = \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2a} dx(ax^2 + b);$$

$$(3) \, \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x} = \frac{2}{a} d(a\sqrt{x} + b);$$

$$(4) \, a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x);$$

$$(5) \, \frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(6) \, \frac{1}{x} dx = d(\ln x);$$

$$(7) \, \cos x dx = d(\sin x);$$

$$(8) \, \sin x dx = -d(\cos x);$$

$$(9) \, \sec^2 x dx = d(\tan x);$$

$$(10) \, \sec x \tan x dx = d(\sec x);$$

$$(11) \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x);$$

$$(12) \, \frac{1}{1+x^2} dx = d(\arctan x) .$$



例5 求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 。

解 因为 $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}$, 所以

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{3\sqrt{x}} d\sqrt{x} = \frac{2}{3} \int e^{3\sqrt{x}} d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3} e^{3\sqrt{x}} + C$$

例6 求 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$ 。

解 因为 $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$, 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2\ln x)}{1+2\ln x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln |1+2\ln x| + C\end{aligned}$$

例7 求 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ 。

解

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \stackrel{u=\frac{x}{a}}{=} \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan u + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

即得公式

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

例8 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$)。

解

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

即得公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

4.4.1 不定积分的换元积分法

1. 第一类换元积分法

定理1（第一换元积分法） 设函数 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$ ，且 $u = \varphi(x)$ 可导，则函数 $F[\varphi(x)]$ 是函数 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数，即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

这个公式称为第一类换元积分法，也称为凑微分法。

利用三角函数的恒等式

例9 求 $\int \tan x dx$ 。

解 因为 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ ，其中 $\sin x dx = -d(\cos x)$ ，所以

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$$

即 $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

同理，可求得

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

例10 求 $\int \sin^2 x dx$.

解：

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos 2x dx \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \int \cos 2x d2x \right) \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

思路：利用二倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ 降幂后再求解。



同理，可求得 $\int \cos^2 x dx$.



例11 求 $\int \sin^3 x dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx \\&= -\int \sin^2 x d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x) d\cos x \\&= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.\end{aligned}$$

思路：将奇数次方拆出一次方，凑微分后利用平方关系化简被积函数，进行求解。

例12 求 $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) \, dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \int \sin 7x \, d7x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int \sin 3x \, d3x \\&= -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C.\end{aligned}$$

思路：利用积化和差公式化简后求解。

利用代数恒等式

例13 求 $\int \frac{x}{1+x} dx$.

解 $\int \frac{x}{1+x} dx = \int \frac{1+x-1}{1+x} dx$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= x - \ln |1+x| + C.$$

例14 求 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ ($a > 0$ 常数).

解 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{(a-x) + (a+x)}{(a-x)(a+x)} dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x} \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (*)$$

例15 求 $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4} &= \int \frac{dx}{(x-4)(x-1)} = \frac{1}{3} \int \frac{(x-1) - (x-4)}{(x-4)(x-1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C.\end{aligned}$$

例16 求 $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} &= \int \frac{dx}{1 + (x + 2)^2} = \int \frac{d(x + 2)}{1 + (x + 2)^2} \\ &= \arctan(x + 2) + C.\end{aligned}$$

例17 求 $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+4x+5)' - 1}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + C.\end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$$

例16

2. 第二换元积分法

定理2（第二换元积分法） 设 $f(x)$ 连续, $x = \psi(t)$ 是单调、可导的函数, 且 $\psi'(t) \neq 0$, 则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

其中, $t = \psi^{-1}(x)$ 为 $x = \psi(t)$ 的反函数。

主要包括两种方法：简单的根式换元法和三角换元法。

1. 简单根式换元法

例1 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 。

解 求这个积分的主要困难是 $\sqrt{x}$ ，所以令 $\sqrt{x}=t$ ，则 $x=t^2$ ，显然

$dx = 2tdt$ ，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 2(t - \ln |1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln |1+\sqrt{x}|) + C\end{aligned}$$

例2 求 $\int \frac{1}{2+\sqrt{x-1}} dx$ 。

解 为了去掉根号，设 $t = \sqrt{x-1}$ ，则 $x = 1+t^2$ ， $dx = 2t dt$ ，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{2t}{2+t} dt = 2 \int \frac{t+2-2}{2+t} dt \\ &= 2 \int dt - 4 \int \frac{1}{2+t} dt = 2t - 4 \ln(2+t) + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 4 \ln(2+\sqrt{x-1}) + C\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$.

解 被积函数含根式 $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}$, 为了去掉根号, 令 $\sqrt[4]{x} = t, x = t^4$,
则 $dx = 4t^3 dt$, 于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \int \frac{4t^3}{t^2 + t} dt = 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t+1} dt \\ &= 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln |t+1| \right) + C. \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.\end{aligned}$$

思考: $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ 该如何设才能去掉根号?

例 4 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解 为了去掉被积函数中的根号, 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, $dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt \\ &= -2t - 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = -2t - \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C \\ &= -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

推广：高次方代换

例 5 求 $\int x(1+x)^{15} dx$.

练习：求 $\int \frac{1}{x(1+x^8)} dx$.

解 为了去掉被积函数中的高次方，令 $1+x = t$ ，则 $t=x+1$ ， $dt=dx$ ，

$$\begin{aligned}\int x(1+x)^{15} dx &= \int (t-1)t^{15} dt = \int (t^{16} - t^{15}) dt \\ &= \frac{1}{17} t^{17} - \frac{1}{16} t^{16} + C \\ &= \frac{1}{17} (1+x)^{17} - \frac{1}{16} (1+x)^{16} + C\end{aligned}$$

推广：倒代法

例 6 求 $\int \frac{1}{x(1+x^8)} dx$.

练习：求 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ ✨

解 为了去掉被积函数分母中的 x^8 ，令 $x = \frac{1}{t}$ ，则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x^8)} dx &= \int \frac{t}{1+\frac{1}{t^8}} d\left(\frac{1}{t}\right) = \int \frac{t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1+t^8}{t^8}} dt \\ &= -\int \frac{t^7}{1+t^8} dt = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{1+t^8} d(t^8) \\ &= -\frac{1}{8} \ln(1+t^8) + C = -\frac{1}{8} \ln\left(1+\frac{1}{x^8}\right) + C \end{aligned}$$



2. 三角换元法

一般被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ 因子时, 可采用三角代换法:

(1) 含 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 时, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

作三角代换 $x = a \sin t$ 或 $x = a \cos t$; $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(2) 含 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 时, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

作三角代换 $x = a \tan t$ 或 $x = a \cot t$; $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

(3) 含 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时, $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$, $\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$

作三角代换 $x = a \sec t$ 或 $x = a \csc t$. $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$

例 1 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

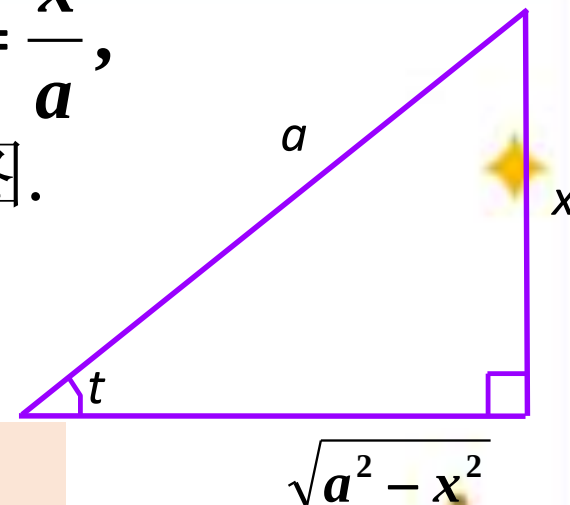
解 令 $x = a \sin t, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 则 $dx = a \cos t dt$, 于是有

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} d(a \sin t) \\&= \int a \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt \\&= a^2 \int |\cos t| \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt \\&= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\&= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C\end{aligned}$$

把变量 t 换为 x . 为简便起见, 根据 $\sin t = \frac{x}{a}$, 画一个直角三角形, 称它为辅助三角形, 如图.

因为 $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, 于是有

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.\end{aligned}$$



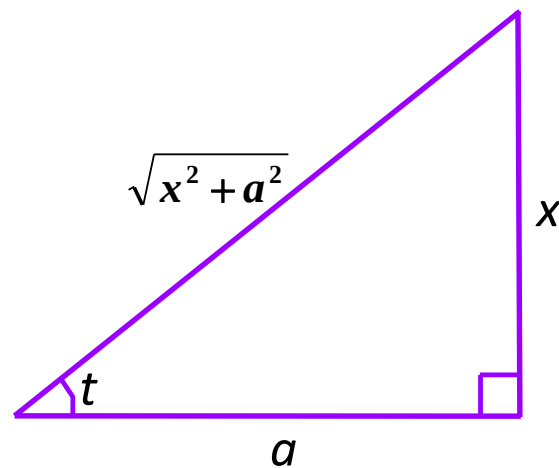
例 2 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} (a > 0)$.

解 令 $x = a \tan t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx = a \sec^2 t dt$, 于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 t}{\sqrt{(a \tan t)^2 + a^2}} dt = \int \frac{a \sec^2 t}{a |\sec t|} dt \\&= \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt \\&= \ln |\sec t + \tan t| + C_1.\end{aligned}$$

根据 $\tan t = \frac{x}{a}$, 作辅助三角形, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \\&= \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + C_1 \\&= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1 - \ln a \\&= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C\end{aligned}$$



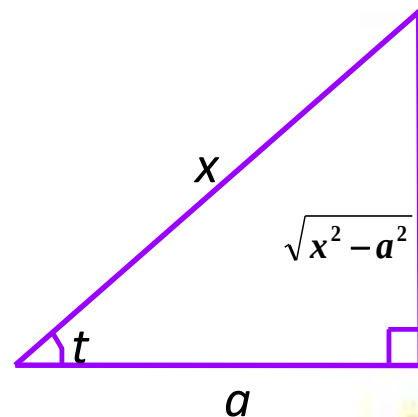
例 3 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0)$.

解 令 $x = a \sec t$, 则 $dx = a \sec t \tan t dt$, 于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt \\ &= \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1,\end{aligned}$$

根据 $\sec t = \frac{x}{a}$, 作辅助三角形, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \\&= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 \\&= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1 - \ln a \\&= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C\end{aligned}$$



例 4 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

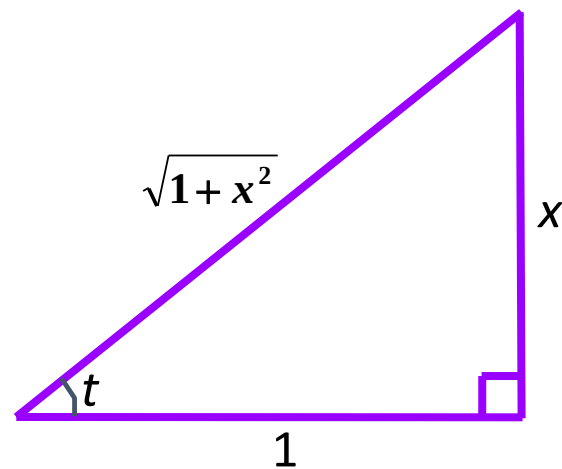
解法一 三角代换法.

令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$, 于是得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d(\tan t)}{\tan t \sqrt{1+\tan^2 t}} = \int \frac{\sec^2 t}{\tan t \sec t} dt \\ &= \int \frac{\sec t}{\tan t} dt = \int \csc t dt \\ &= \ln |\csc t - \cot t| + C.\end{aligned}$$

根据 $\tan t = x$ ，作辅助三角形，得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln |\csc t - \cot t| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right| + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} + C.\end{aligned}$$



解法二 凑微分法.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}} d\frac{1}{x} \\&= -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \right| + C = -\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right| + C \\&= \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} + C.\end{aligned}$$

解法三 根式代换法.

$$\text{令 } \sqrt{1+x^2} = t, \quad x = \sqrt{t^2-1}, \quad \text{则 } dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

于是有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{t}{t\sqrt{t^2-1} \sqrt{t^2-1}} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2} + C$$

$$= \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C.$$

例 5 求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ (习题(2))

解 令 $x = a \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{a^2 \sin^2 t}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} d(a \sin t) = \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \sqrt{1 - \sin^2 t}} a \cos t dt \\&= \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} a \cos t dt = \int a^2 \sin^2 t dt = a^2 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\&= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) + C \\&= \frac{a^2}{2} (t - \sin t \cos t) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C\end{aligned}$$