

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）总决赛试卷

（非数学类，2021）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分

题号 一 二 三 总分

满分 15 25 60 100

得分

注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得分

评阅人

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是 ().

(A) $a = 0$ (B) $b = 1$ (C) $c = 0$ (D) $d = \frac{1}{6}$

2. 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 ().

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = ()$.

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

数学竞赛试题 第1页 (共 6 页)

$$(D) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则().

$$(A) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (B) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(C) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (D) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

5. 下列命题正确的是().

- ① 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在.
 ② 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数一定存在最大值与最小值.
 ③ $f'(x_0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值的必要条件.
 ④ 若函数 $f(x)$ 在点 a 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 a 处也连续.
 ⑤ 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处偏导数存在的必要条件.

(A) ②④ (B) ①②④ (C) ②④⑤ (D) ②⑤

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \frac{a}{x} + k \sin \frac{a}{x})^x = \underline{\hspace{2cm}}. (a, k \neq 0)$

2. 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\int_0^{\pi} \sqrt{(\sin^3 x - \sin^5 x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设函数 $z = z(x, y)$, 由方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且

$F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

5. 已知直线 L 过点 $M_0(-1, 0, 4)$, 且与直线 $L_1: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 垂直, 又与

平面 $\pi: 3x-4y+z-10=0$ 平行, 则直线 L 的方程是_____.

得 分	
评阅人	

三、综合题 (本题共 6 小题, 共 60 分, 请写出相应演算步骤。)

1. (本小题10分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数,

且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$.

(1)求 $f'(x)$; (2)讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

2. (本小题10分) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

3. (本小题12分) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.

4. (本小题8分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质, 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

5. (本小题8分) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数

6. (本小题12分) 求微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.