

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷答案 (非数学类, 2021)

一、单项选择题（每题 3 分，共 5 题，共 15 分）

1.D 2.D 3.A 4.C 5.B

二、填空题（每题 5 分，共 5 题，共 25 分）

1. y轴或x=0 2. 1 3. $\frac{1}{e}$ 4. -2 5. $-\frac{\ln x}{x} + C$

三、解答题（共 6 题，共 60 分）

1. 解： 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{2+1}{1} = 3 \dots\dots\dots 3\text{分}$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{-2+1}{-1} = 1 \dots\dots\dots 7\text{分}$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ 不存在.....8分

2. 解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (3\sin t + t^2 \cos \frac{1}{t}) dt}{(1 + \cos x) \int_0^x \ln(1+t) dt} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (3\sin t + t^2 \cos \frac{1}{t}) dt}{\int_0^x \ln(1+t) dt} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} \dots\dots\dots 4\text{分}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{3 \sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} (3+0) = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 8\text{分}$

3. 解： 函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, 令 $y' = 0$, 得驻点 $x = 0$ 及 $x = 3$, 和不可导点 $x = 1$.

$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0 \dots\dots\dots 3\text{分}$

(1) 函数的单调增加区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$, 单调减少区间为 $(1, 3)$, 极小值为 $y|_{x=3} = \frac{27}{4} \dots\dots 6\text{分}$

(2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内是凹的, $(0, 0)$ 是其拐点;.....9分

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ 知 $x=1$ 是函数图形的铅直渐近线;

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$ 知函数图形无水平渐近线.....12分

4. 解: 由函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 得 $f(x) = (\frac{\sin x}{x})' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$4分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x df(x) = x f(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = \frac{x \cos x - \sin x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\sin x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1 \dots 10分$$

5. 证 由积分中值定理得: 存在 $\eta \in [0, x]$, 使 $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt = \eta^2 f(\eta)x$,

从而 $F(1) = \eta^2 f(\eta) = f(1)$4分

设 $G(x) = x^2 f(x)$, 则 $G(1) = f(1)$, 而 $G(\eta) = \eta^2 f(\eta) = f(1)$, 从而 $G(1) = G(\eta)$,.....9分

对函数 $G(x)$ 在 $[\eta, 1] \subset [0, 1]$ 上使用罗尔定理得:

至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$12分

6. 解: 如右图所示, 所求面积为 $S = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_1^2 (2x - x^2) dx = x^2 \Big|_1^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 - x^2 \Big|_2^3 = \frac{4}{3}.$$

故所求图形面积为 $S = S_1 + S_2 = 2$4分

平面图形 S_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_1 = \pi \int_1^2 (x^2 - 2x)^2 dx.$$

平面图形 S_2 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_2 = \pi \int_2^3 (x^2 - 2x)^2 dx.$$

故所求旋转体体积 $V = V_1 + V_2 = \pi \int_1^3 (x^2 - 2x)^2 dx$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_1^3 = \frac{46}{15} \pi \dots 10分$$

