

山东省大学生数学竞赛（专科）总决赛试卷答案 （非数学类，2021）

一、选择题（每题 3 分，共 5 题，共 15 分）

1. (D) 2. (B) 3. (C) 4. (B) 5. (A)

二、填空题（每题 5 分，共 5 题，共 25 分）

1. e^{ka} 2. 0 3. $\frac{4}{5}$ 4. z 5. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{5}$

三、解答题（共 6 题，共 60 分）

1. 解：（1）当 $x \neq 0$ 时，有

$$f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2} = \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2} \dots\dots\dots 2\text{分}$$

当 $x=0$ 时，由导数定义得

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} \dots\dots\dots 5\text{分}$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{g''(0) - 1}{2}, & x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 6\text{分}$$

（2）因为在 $x=0$ 处，有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + xg''(x) - g'(x) + e^{-x} - (x+1)e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0) \dots\dots\dots 9\text{分} \end{aligned}$$

而 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处是连续函数，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为连续函数..... 10分

2. 解：由条件显然有 $f(1) = 0$ ， $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \dots\dots\dots 1\text{分}$

由分部积分法及换元积分法有

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \dots\dots\dots 3\text{分}$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx = -4 \int_0^1 \ln(x+1) d\sqrt{x} = -4\sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \dots\dots\dots 6\text{分}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{令 } t=\sqrt{x}}{=} -4 \ln 2 + 8 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = -4 \ln 2 + 8 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= -4 \ln 2 + 8(t - \arctan t) \Big|_0^1 = -4 \ln 2 + 8 - 2\pi \dots\dots\dots 10\text{分} \end{aligned}$$

3. 证法一：因为 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上满足拉格朗日中值定理，

故至少存在一点 $\xi_1 \in (0, c)$ ，使 $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}$ ，..... 4分

由于点 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

从而 $f'(\xi_1) = f(1) - f(0)$.

同理可证，存在 $\xi_2 \in (c, 1)$ ，使 $f'(\xi_2) = f(1) - f(0)$ 8分

由 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ 知，在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上， $f'(x)$ 满足罗尔定理的条件，

所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ 使 $f''(\xi) = 0$ 12分

证法二：点 A 与点 B 连线的方程为 $y = [f(1) - f(0)]x + f(0)$

令 $F(x) = f(x) - [f(1) - f(0)]x - f(0)$ ，..... 4分

则 $F(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, 1]$ 上满足罗尔定理条件，

于是至少分别存在点 $\xi_1 \in (0, c)$ 与 $\xi_2 \in (c, 1)$ ，使 $F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$ 8分

于是 $F'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，

故至少存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ 使 $F''(\xi) = f''(\xi) = 0$ 12分

4. 证明：因为 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(x) > 0$ ，

由最值定理，知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m ，

即 $m \leq f(x) \leq M$ ，故 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx, \text{ 则 } m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M, \text{ 5分}$$

$$\text{由介值定理知，存在一点 } \xi \in [a, b], \text{ 使 } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \text{ 8分}$$

5. 解：（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \text{ 收敛半径 } R = 1, \text{ 2分}$$

在端点 $x = 1$ 处，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ，发散；在 $x = -1$ 处，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}$ ，发散，

故收敛域为 $(-1, 1)$ 4分

(2) 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$,

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

然后两边对 x 求导,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x S(x) dx \right] = \left(\frac{x}{1-x} \right)', \text{ 得 } S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

6. 解: 原方程可化为 $y' - \frac{2}{x}y = -1$, 则

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[-\int e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = x^2 \left(\frac{1}{x} + C \right) = x + Cx^2 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

由曲线 $y = x + Cx^2$ 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体

$$\text{体积为 } V(C) = \int_1^2 \pi(x + Cx^2)^2 dx = \pi \left(\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right) \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{令 } V'(C) = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0, \text{ 得 } C = -\frac{75}{124}.$$

又 $V''(C) = \frac{62}{5}\pi > 0$, 故 $C = -\frac{75}{124}$ 为唯一极小值点, 也是最小值点, 于是得

$$y = x - \frac{75}{124}x^2 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$