

座号:

身份证号:

姓名:

所在院校:

线
—
封
—
密

绝密★启用前

山东省大学生数学竞赛（专科）决赛试卷

（非数学类，2021）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	总 分
满 分	15	25	60	100
得 分				

注意：1. 答题前，请竞赛选手将密封线内的项目填写清楚。

2. 将答案直接答在试卷相应题目的位置，答错位置不得分。

得 分	
评阅人	

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分，请将答案填在题中括号里。）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是（ ）.

- (A) 无穷小
- (B) 无穷大
- (C) 有界的，但不是无穷小量
- (D) 无界的，但不是无穷大量

2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{e^{x-1}} - 1}$ ，则（ ）.

- (A) $x = 0$, $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
- (B) $x = 0$, $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
- (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
- (D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

3. 下列等式正确的是（ ）.

$$(A) \quad d\left[\int f'(x)dx\right] = f'(x)dx \quad (B) \quad \frac{d\left[\int_a^x f(t)dt\right]}{dx} = f'(x)$$

$$(C) \quad d\left[\int_x^a f(t)dt\right] = f(x)dx \quad (D) \quad \frac{d\left[\int_x^a f(t)dt\right]}{dx} = f(x)$$

$$4. \quad M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx, \quad N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, \quad P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$$

则有 ().

$$(A) \quad N < P < M \quad (B) \quad M < P < N \quad (C) \quad P < M < N \quad (D) \quad N < M < P$$

5. 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ().

$$(A) \quad \alpha, \beta, \gamma \quad (B) \quad \alpha, \gamma, \beta \quad (C) \quad \beta, \alpha, \gamma \quad (D) \quad \beta, \gamma, \alpha$$

得 分	
评阅人	

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分, 请将答案填在题中横线上。)

1. 设函数 $f(x)$ 为奇函数, 则函数 $F(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$ 关于 _____ 对称.

2. 若 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	
评阅人	

三、综合题 (本题共 6 小题, 共 60 分, 请写出相应演算步骤。)

1. (本小题8分) 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

2. (本小题8分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (3\sin t + t^2 \cos \frac{1}{t}) dt}{(1 + \cos x) \int_0^x \ln(1 + t) dt}$.

3. (本小题12分) 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

- (1) 函数的增减区间及极值;
- (2) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (3) 函数图形的渐近线.

4. (本小题10分) 设函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx$.

5. (本小题12分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$, 且 $F(1) = f(1)$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

6. (本小题10分) 求曲线 $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S , 并求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V .