

第十一届山东省大学生数学竞赛（专科组）

总决赛试卷答案

（非数学类（A），2020）

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，请将正确选项填在题中横线上。）

1.A 2.C 3.D 4.C 5.B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请将答案填在题中横线上。）

1. $n=2$ 2. -2 3. 0 4. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx$ 5. $y=Cx \cdot e^{-x}$.

三、综合题（本题共 7 小题，共 60 分，请写出相应演算步骤。）

1. 解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]}{x}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

下面求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\ln(1+x)}{x}}{x} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以原式} = e^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

2. 证 作辅助函数 $F(x) = xf(x)$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而在 (a,b) 内至少存在一点

ξ , 使 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

3. 解 因为 $f'(x) = 3x^2 + 6ax - a$, 且 $\Delta = 12a(3a+1) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

易知,

当 $\Delta < 0$ 时, $f'(x)$ 无实数根, 则 $f(x)$ 无驻点, 从而 $f(x)$ 无极值点. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当 $\Delta > 0$ 时, 易知有两个驻点且为极值点. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

当 $\Delta = 0$ 时, $a = -\frac{1}{3}$ 或 0 , 这时 $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ 或 $f'(x) = 3x^2$, 可知这时函数

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + C_1 \text{ 或 } f(x) = x^3 + C_2, \text{ 从而无极值点.} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由此可知, 当 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 既无极大值又无极小值. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

4. 解 设 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, $f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$,

$$\int f(x)dx = \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = -\int \ln(1+e^x) de^{-x} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

$$= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

5. 证明 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

不等式各边除以 $b-a$, 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

这表明, 确定的数 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \in [m, M]$. 根据闭区间上连续函数的介值定理的推论,

在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得函数使得 $f(x)$ 在点 ξ 处的值与这个确定的数值相等, 即应有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

两端各乘 $b-a$, 即得所要证的等式.

6. 解 由题意可得

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3\pi}{5} a^{\frac{5}{3}}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$V_y = \pi a^{\frac{7}{3}} - \pi \int_0^{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} y^6 dy = \pi a^{\frac{7}{3}} - \frac{\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 $V_y = 10V_x$, 所以 $\frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3\pi}{5} a^{\frac{5}{3}},$

解得 $a = 7\sqrt{7}$ 8 分

7. 解 ①记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}} \right| = x^2,$$

所以由比值审敛法知, 当 $x^2 < 1$, 即 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $x^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 级数发.....3 分

于是可知幂级数的收敛半径 $R = 1$, 即收敛区间为 $(-1, 1)$; 当 $x = \pm 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 为交错级数, 由莱布尼兹定理知级数收敛, 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域

为 $[-1, 1]$ 6 分

②记 $S(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的和函数, 则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x \cdot S_1(x)$$

其中 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, $x \in [-1, 1]$ 8 分

由幂级数和函数的性质得

$$\begin{aligned} S_1'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1] \end{aligned} \text{10 分}$$

所以 $S_1(x) = \int_0^x S_1'(t) dt + S_1(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + 0 = \arctan t \Big|_0^x = \arctan x$.

故 $S(x) = xS_1(x) = x \arctan x$, $x \in [-1, 1]$ 12 分