

第3章 导数的应用

1 微分中值定理

2 利用导数求极限
(洛必达法则)

3 函数的单调性与极值

4 曲线的凹凸性与拐点

5 利用导数求最值



本章内容



第一节 微分中值定理

本节主要内容：

一. 罗尔定理

二. 拉格朗日中值定理

三. 柯西中值定理

一、罗尔定理

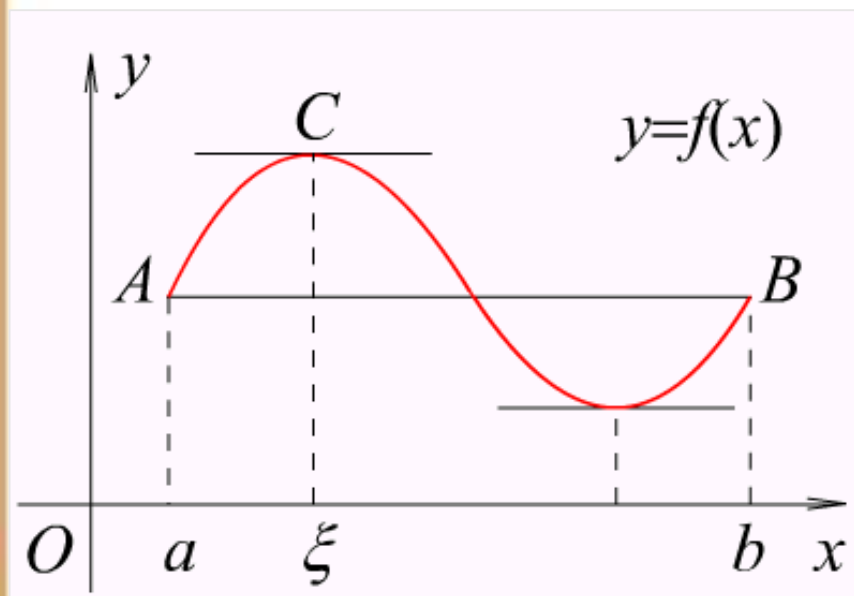
定理3.1.1（罗尔定理） 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，如果

- (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) 函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导；
- (3) 函数 $f(x)$ 在区间两端点处的函数值相等，即

$f(a) = f(b)$ ；则在 (a, b) 内至少存在一个点 $a < \xi < b$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。

例如, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. 在 $[-1,3]$ 上连续,
在 $(-1,3)$ 内可导, 且 $f(-1) = f(3) = 0$,
 $\therefore f'(x) = 2(x-1)$, 取 $\xi = 1, (1 \in (-1,3))$ $f'(\xi) = 0$.

罗尔定理的几何意义:



如果连续函数除两个端点外处处有不垂直于 x 轴的切线, 并且两端点处纵坐标相等, 那么在曲线上至少存在一点 ξ , 在该点处的切线平行于 x 轴。



两点说明:

1. 罗尔定理中的 ξ 是 (a, b) 内的某一点, 定理仅从理论上指出了它的存在性, 而没有给出它的具体取值;

2. 罗尔定理的条件是充分非必要条件, 只要三个条件均满足, 就充分保证结论成立。但如果三个条件不全满足, 则定理的结论可能成立也可能不成立。看如下例子:

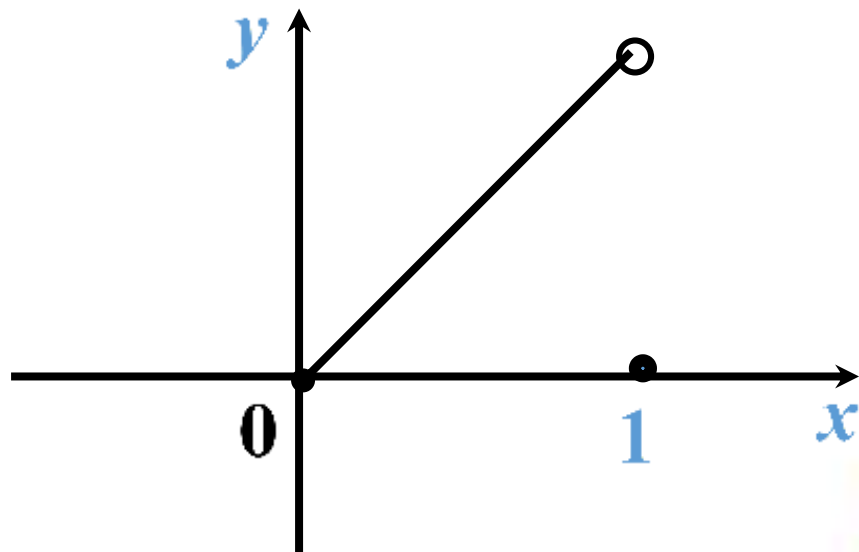
例 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

~~(1)~~ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续

(2) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导

(3) $f(0) = f(1)$.

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0$.



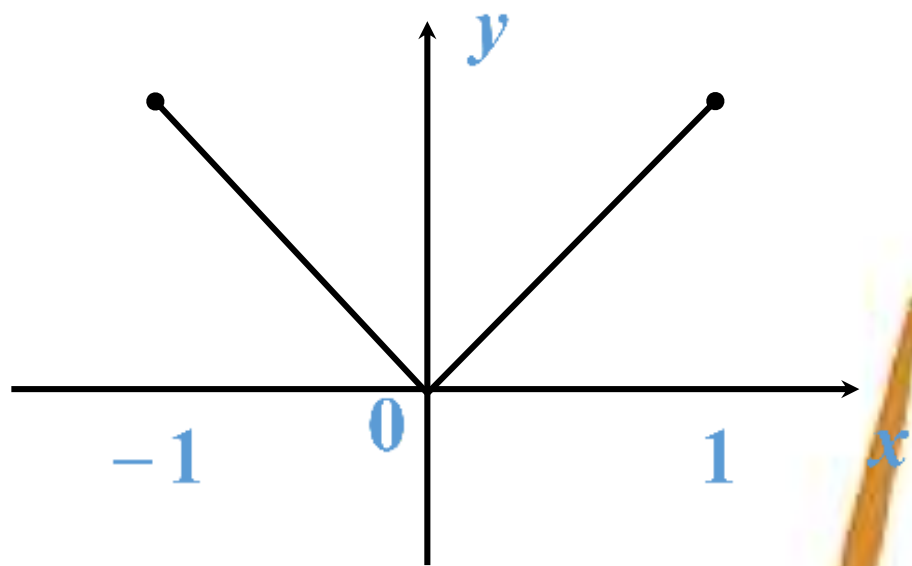
例 $f(x) = |x|, x \in [-1, 1];$

(1) $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续

~~(2)~~ $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内可导

(3) $f(-1) = f(1).$

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0.$



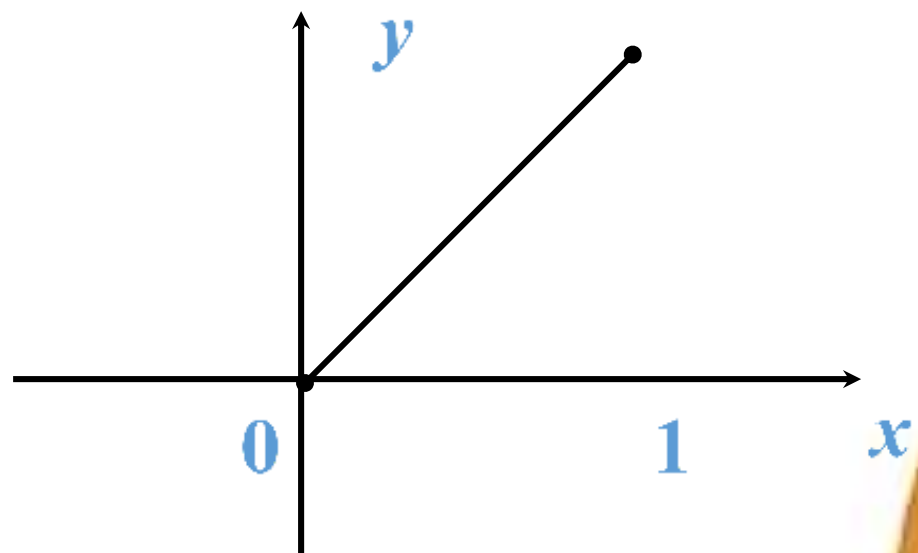
例 $f(x) = x, x \in [0, 1]$;

(1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续

~~(2)~~ $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导

(3) $f(0) = f(1)$.

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0$.



例1 验证罗尔定理对函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1,2]$ 上的正确性, 并求出 ξ .

解 (1) $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1, 2]$ 上连续;

(2) $f'(x)=3x^2+8x-7$ 在 $(-1, 2)$ 内存在;

(3) $f(-1)=f(2)=0$;

所以 $f(x)$ 满足定理的三个条件.

令 $f'(x)=3x^2+8x-7=0$ 解得 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{37}}{3}$

则 $\xi = \frac{\sqrt{37}-4}{3} \in (-1, 2)$ 就是要找的点, 显然有 $f'(\xi)=0$.

例2 不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根.

解 $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,2], [2,3]$ 上连续, $(1,2), (2,3)$ 内可导,
且 $f(1)=f(2)=f(3)=0$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2], [2,3]$ 上满足罗尔定理的条件。

$\therefore$ 在区间 $(1,2)$ 、 $(2,3)$ 内分别至少有一实根;

又 $f'(x)=0$ 是二次方程, 至多有二个实根;

$\therefore$ 方程 $f'(x)=0$ 有且仅有两个实根, 它们分别落在区间 $(1,2)$ 、 $(2,3)$ 内.

二、拉格朗日中值定理

定理3.1.2（拉格朗日中值定理）

设函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
- (2) 在开区间 (a,b) 内可导；

那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ($a < \xi < b$)，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

注意： Rolle 定理是 Lagrange 定理的特殊情况。



说明：

1. 拉格朗日中值定理的两个条件是使结论成立的充分不必要条件；
2. 当 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日中值定理即为罗尔定理；
3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， $x_0, x_0+\Delta x \in (a, b)$ 则有

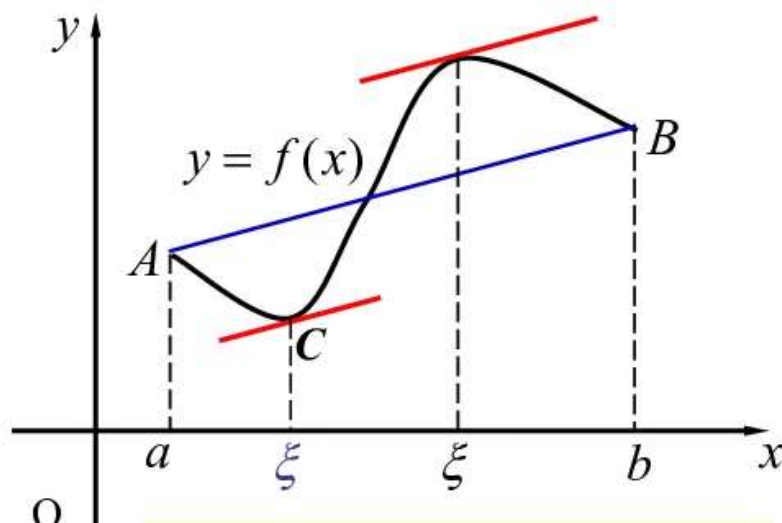
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\text{即 } \Delta y = f'(\xi) \cdot \Delta x$$

拉格朗日中值公式又称有限增量公式.

拉格朗日定理的几何意义：当曲线方程满足拉格朗日定理的要求时，在区间内至少存在一点 ξ ，使得该点的切线平行于曲线两端点 $(a, f(a))$ 与 $(b, f(b))$ 的连线，其斜率为

$$k = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



推论1 设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若在 (a, b) 内的导数恒为零, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 为常数.

即 $f'(x) = 0$, 则 $f(x) = C$.

推论2 如果函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在区间 (a, b) 内的导数处处相等, 即 $f'(x)=g'(x)$, 则这两个函数在 (a, b) 内只相差一个常数, 即 $f(x)-g(x)=C$.

例3 证明： $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1)$

证明 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

由推论1知 $f(x) = C$

又因为 $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

所以 $C = \frac{\pi}{2}$, 即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

例4 证明：当 $x>0$ 时， $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

证明 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，

$$\text{即 } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad 0 < \xi < x$$

$$\because f(0) = 0, \quad f'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \therefore \ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}$$

因为 $0 < \xi < x$, 所以 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$

$$\text{即 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

三、柯西中值定理

定理3.1.3（柯西中值定理）

设函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内恒不为零，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

注意：拉格朗日中值定理是柯西中值定理当 $g(x)=x$ 时的一种特例。

3.2 利用导数求极限（洛必达法则）

未定式极限： $\frac{0}{0}$ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $0 \cdot \infty$ 型, 0^0 型, 1^∞ 型, ∞^0 型等。

定理（洛必达法则）

若 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 ∞), $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (或 ∞);

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某邻域内 (点 x_0 可除外) 可导, 且 $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限数, 也可为 $+\infty$ 或 $-\infty$), 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$



说明:

(1) 凡是属于 “ $\frac{0}{0}$ ” 型和 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型的极限, 不论自变量 $x \rightarrow x_0$ 还是 $x \rightarrow \infty$, 只要定理所要求的相应条件得到满足, 公式都成立.

(2) 若施行一次洛必达法则 后, 问题尚未解决, 而 函数 $f'(x), \varphi'(x)$ 仍满足定理条件, 则可 继续使用洛必达法则, 即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 。

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ 。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x + 2)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 3)'}{(3x^2 - 2x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 。

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \ (n > 0)$ 。

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x}$ 。

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{120x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{120}{e^x} = 0$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ 。

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

$\because \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 极限不存在

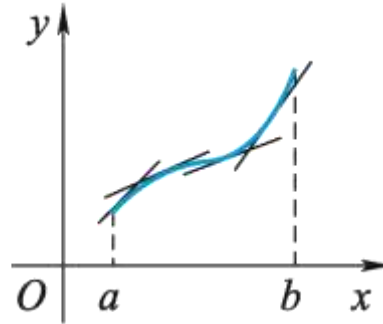
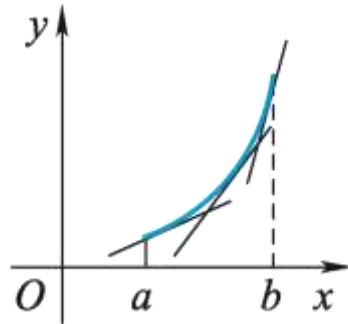
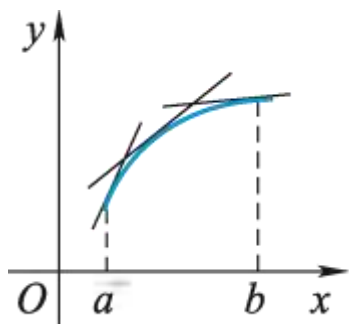
$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ 极限不存在

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

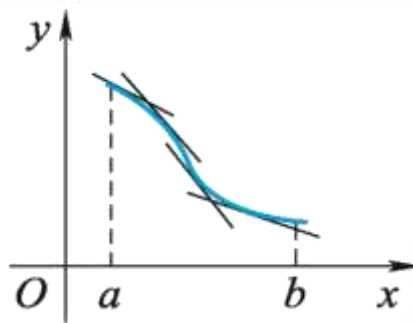
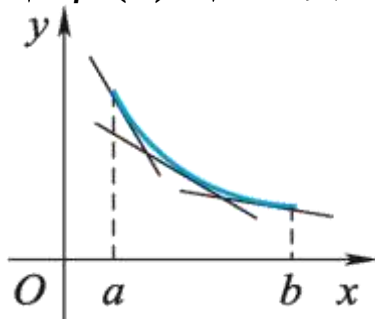
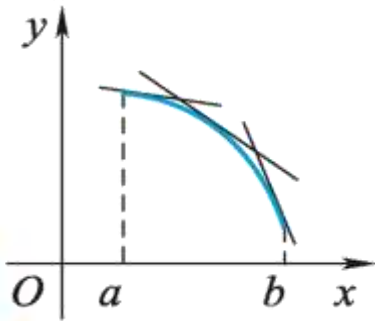
练习：计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}$ 。

3.3.1 函数的单调性

单调增函数 切线斜率 $f'(x)$ 都是正的;



单调减函数 切线斜率 $f'(x)$ 都是负的;



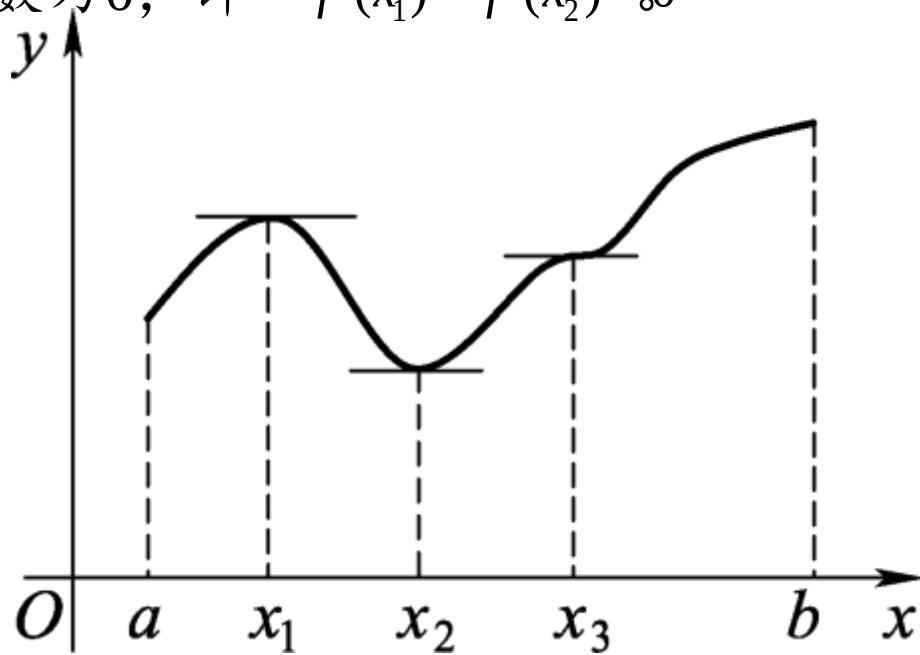
思考：由切线斜率 $f'(x)$ 都是正(负)的是否能判断函数的单调性?

我们有如下定理：

定理1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，则有

- (1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；
- (2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

有时，函数在其整个定义域上并不具有单调性，但在其各个部分区间上却具有单调性。如下图所示，函数 $f(x)$ 在区间 $[a, x_1]$ 和 $[x_2, b]$ 上单调增加，而在 $[x_1, x_2]$ 上单调减少，并且，从图上容易看到，可导函数 $f(x)$ 在单调区间分界点处的导数为0，即 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$



确定函数单调性的一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求出使函数 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，并以这些点为分界点，将定义域划分成若干个子区间；
- (3) 确定 $f'(x)$ 在各个子区间的符号，从而确定 $f(x)$ 的单调区间。

例1 讨论函数 $f(x) = 3x^2 - x^3$ 的单调性。

解 $f(x) = 3x^2 - x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且 $f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$ 。

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = 0, x_2 = 2$ ，将区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成 $(-\infty, 0), (0, 2), (2, +\infty)$ 。

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上均连续。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单减↘		单增↗		单减↘

由定理1知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 与 $[2, +\infty)$ 上单调减少，
在区间 $[0, 2]$ 上单调增加。

例2 讨论函数 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性。

解 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且 $f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3x + 2(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ 。

不可导点为 $x=0$ 。令 $f'(x)=0$ ，得驻点 $x=\frac{2}{5}$ 。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\neq$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由定理1知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 与 $[2, +\infty)$ 上单调减少，
在区间 $[0, 2]$ 上单调增加。

3.3.2 函数的极值

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若对此邻域内任一点 x ($x \neq x_0$)，均有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值。同样，若对此邻域内任一点 x ($x \neq x_0$)，均有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值。函数的极大值与极小值统称为函数的极值。使函数取得极值的点 x_0 称为极值点。

从图4-3可以看出，可导函数在取得极值处的切线是水平的，即在极值点 x_0 处，必有 $f'(x_0)=0$ ，于是有下面的定理：

定理2（极值存在的必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，并且在点 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$ 。

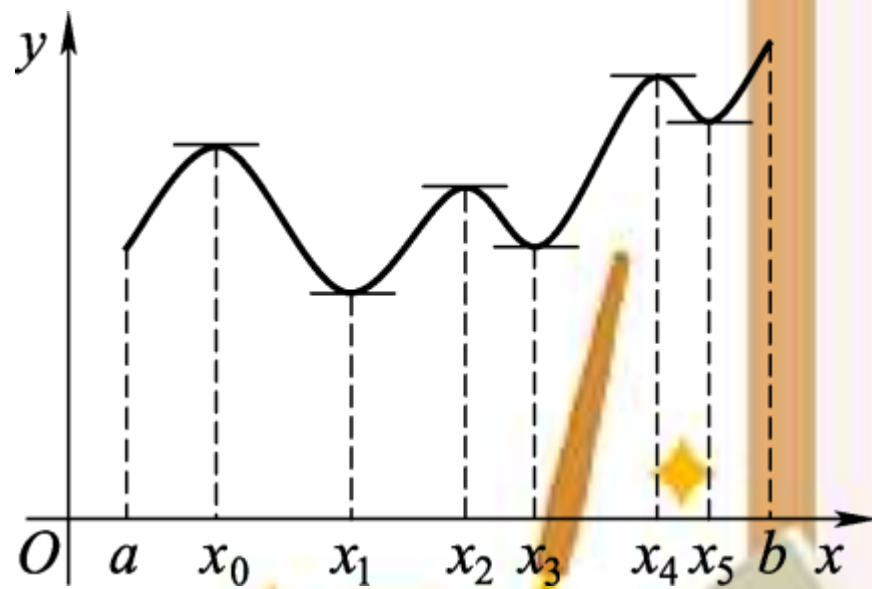


图4-3

对于一个连续函数，它的极值点还可能是使导数不存在的点，这种点称为尖点。例如，函数 $f(x)=|x|$ ， $f'(0)$ 不存在，但 $x=0$ 是它的极小值点，如图4-4所示

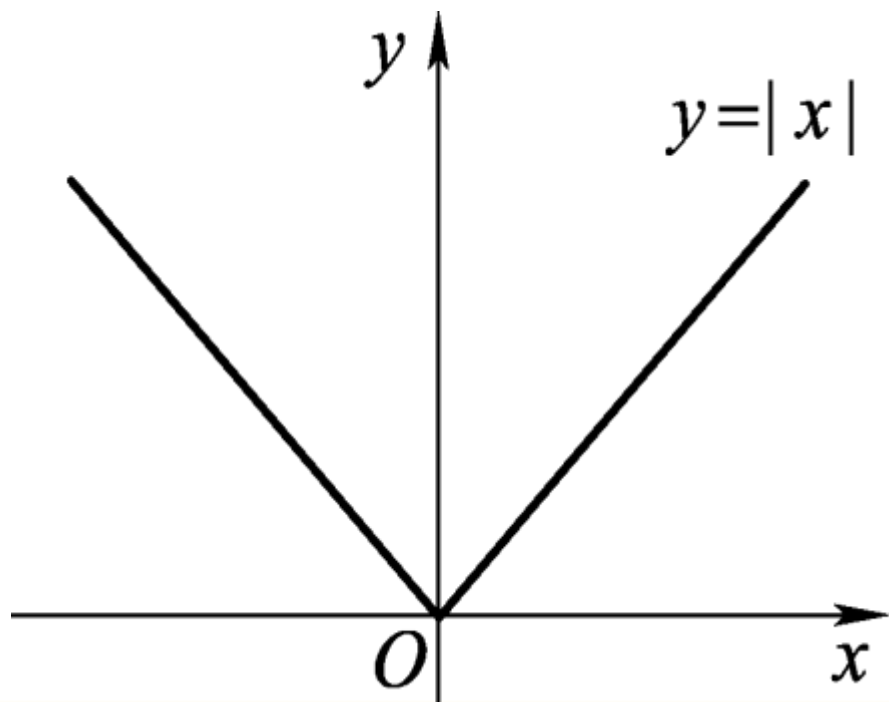


图4-4

定理3 (极值存在的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且在点 x_0 的某一空心邻域内可导。当 x 由小到大经过点 x_0 时,

- (1) 如果 $f'(x)$ 由正变负, 那么点 x_0 是极大值点;
- (2) 如果 $f'(x)$ 由负变正, 那么点 x_0 是极小值点;
- (3) 如果 $f'(x)$ 不变号, 那么点 x_0 不是极值点。

综上所述，求函数极值的一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点及不可导点；
- (3) 考察上述点两侧一阶导数的符号，确定极值点；
- (4) 求出极值点处的函数值，得到极值。

例2 求函数 $y=1-x^2$ 的极值。

解 函数的导数为 $y'=-2x$ 。令 $y'=0$ ，得 $x=0$ 。

用 $x=0$ 将函数 $y=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个区间，一阶导数的符号讨论如表4-2所示。

表4-2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	极大值 $f(0)=1$	$\searrow$

由上表可见，函数 $y=1-x^2$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $y=1$ 。

定理4（极值存在的第二充分条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$ ， $f''(x_0) \neq 0$ 。

(1) 如果 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 如果 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。

例3 求函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 的极值。

解法一： $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

令 $f'(0)=0$ ，得驻点 $x_1=1, x_2=3$ 。驻点将定义域分成3个区间，一阶导数的符号讨论如表4-3所示。

表4-3

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	极大值 $f(1)=4$	↘	极小值 $f(3)=0$	↗

由定理3可知， $f(1)=4$ 为函数 $f(x)$ 的极大值， $f(3)=0$ 为 $f(x)$ 的极小值。

解法二： $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, f''(x) = 6x - 12$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 。又因为 $f''(1) = -6 < 0$ ，所以， $f(1) = 4$ 为 $f(x)$ 的极大值；因为 $f''(3) = 6 > 0$ ，所以， $f(3) = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值。

例7 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 。

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \frac{1}{x} + \ln x - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

练习：计算 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

例8 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \ (n > 0)$ 。

解

此题属 $0 \cdot \infty$ 型未定式，因为

$$x^n \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$$

所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时，上式右端是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，应用洛必达法则，得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x^n}{n} \right) = 0$$

例9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

解 此题属 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 因为 $(1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, 上式右端是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \csc^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$