



1 导数的概念

2 导数的运算

3 高阶导数

4 隐函数的导数和由参数方程
确定的函数的导数

5 函数的微分及其应用

本章内容

2.1 导数的概念

01

案例分析

02

导数的概念

03

求导数举例

04

用导数表示实际量
——变化率模型

05

函数的可导性
与连续性的关系

2.1.1 案例分析

引例 自由落体的瞬时速度

如图所示是著名的伽利略自由落体实验的场景。如果物体在真空中自由下落，则它的运动方程为

$$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

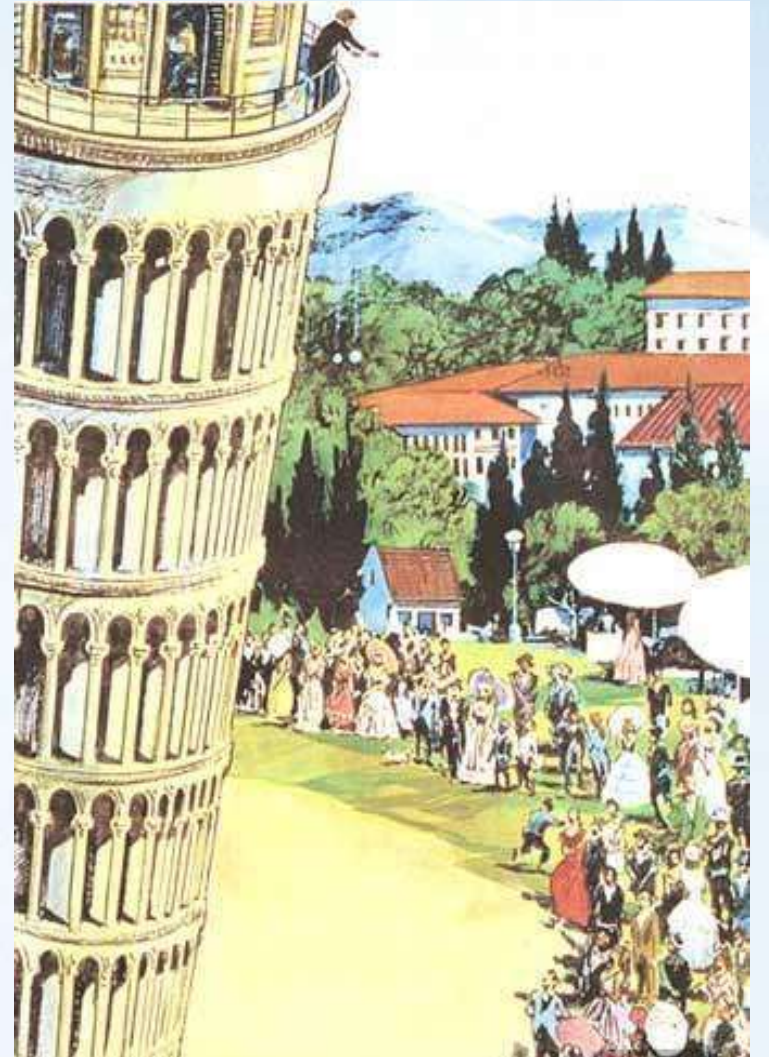
其中 g 为常量。试求物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v 。

分析

匀速直线运动 $v = \frac{s}{t}$

变速直线运动 $\bar{v} = \frac{s}{t}$

不能精确地描述运动过程中任一时刻的瞬时速度。



如图所示，给定时间变量 t 在 t_0 时的一个增量 Δt ，则在从时刻 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ ，这段时间间隔内，物体运动路程的增量为

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \frac{1}{2} g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 = g t_0 \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2,$$

从而可以求得物体在时间段 Δt 内的平均速度为

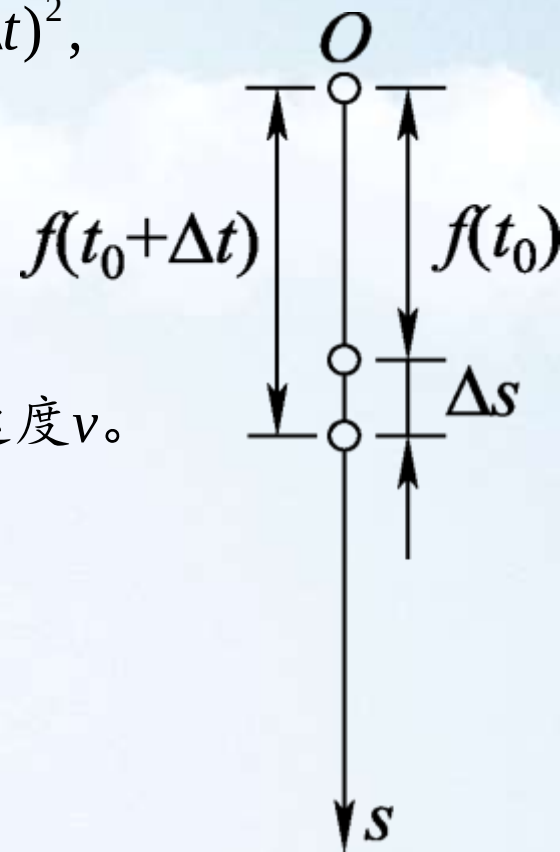
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = g t_0 + \frac{1}{2} g \Delta t$$

当 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 无限接近于物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v 。

因此，平均速度的极限值就是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v ，即可定义

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[g t_0 + \frac{1}{2} g \Delta t \right] = g t_0. \end{aligned}$$

可以看到，上述定义与物理学中自由落体的瞬时速度公式是一致的。



引例 曲线的切线斜率

在曲线上任取不同于 M_0 点的一点 M ，作割线 M_0M 交曲线于 N 点.当点 M 沿着曲线移动并趋于 M_0 点时，割线就以点 M_0 为轴转动，割线 M_0M 的极限位置 M_0T 就叫做曲线在点 M_0 处的切线，点 M_0 叫做切点。

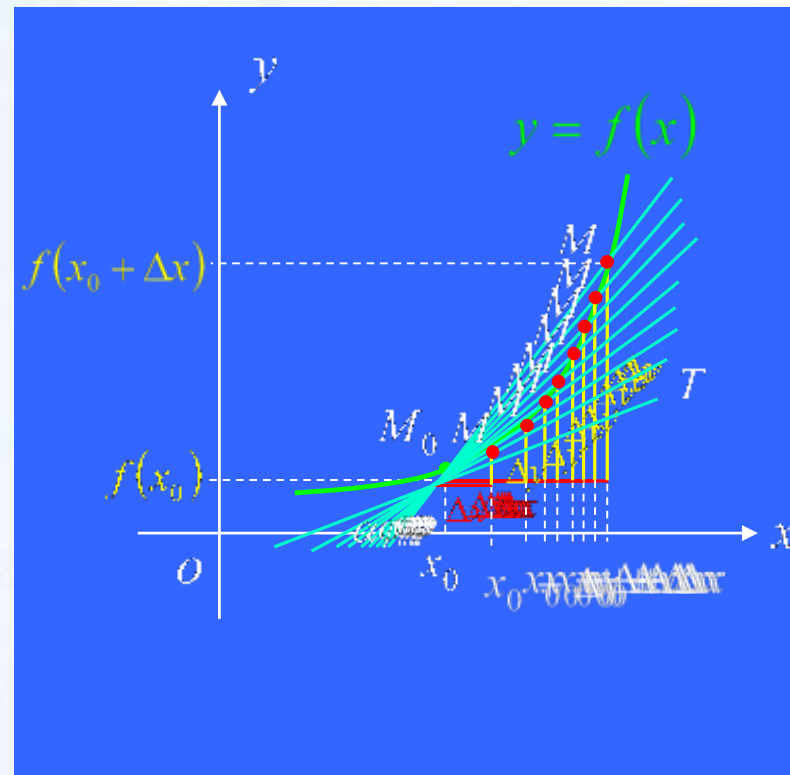
分析

建立直角坐标系，设 $M_0(x_0, f(x_0))$ ， $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ ，
 设割线 MN 的倾角为 ϕ ，切线 MT 倾角为 α ，则割线 MN 斜率为

$$k_{MN} = \tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

切线 MT 的斜率为

$$k_{MT} = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



2.1.2 导数的概念

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处及其左右近旁有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， Δy 与 Δx 之比的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作

$$f'(x_0), y'|_{x=x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{公式1})$$

若上式的极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导（或导数不存在）。

$$\text{令 } x = x_0 + \Delta x, \text{ 得 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{公式2})$$

注： $f'(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的瞬间变化率。

例1 已知函数 $y = x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=1}$.

解 利用公式1,
$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

利用公式2,
$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

定义2 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导。这时对任意一个 $x \in (a, b)$, 都有一个确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应, 这样就构成了一个新函数 $f'(x)$, 称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 简称导数, 即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

也可记作

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$$

思考: $f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的关系是什么?
$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$$

2.1.3 求导数举例

由导数定义可知，求函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可按以下三个步骤进行：

(1) 求增量： $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ；

(2) 算比值： $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ；

(3) 取极限： $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 。

例1 求函数 $y=c$ (c 为常数) 的导数。

解 因为 $y=c$ 为常数，所以 $\Delta y=0$ ， $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ ， $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

即 $(c)' = 0$

例2 求函数 $y = x^2$ 的导数。

解 $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

推广：幂函数的求导公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 为任意实数)

例3 求下列函数的导数： (1) $y = \frac{1}{x}$ (2) $y = \sqrt{x}$ 。

解 (1) $y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$(2) \quad y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例4 求函数 $y = \sin x$ 的导数。

解 $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

即 $(\sin x)' = \cos x$ 同样的方法可以求出 $(\cos x)' = -\sin x$

例5 求下列函数在指定点处的导数： $y = \cos x, x = \frac{\pi}{2}$

解 $y' = (\cos x)' = -\sin x, y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$

例6 求指数函数 $y = e^x$ 的导数。

解

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

推广: $(a^x)' = a^x \ln a$

例7 求下列函数在指定点处的导数: $y = 2^x$, $x = 1$

解

$$y' = (2^x)' = 2^x \ln 2, y'|_{x=1} = 2 \ln 2$$

例8 求对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的导数.

解 $\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

推广: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

例9 求下列函数在指定点处的导数: $y = \log_2 x$

解 $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

公式汇总:

(1) $(c)' = 0$; (2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$; (4) $(e^x)' = e^x$;

(5) $(\log a^x)' = \frac{1}{x \ln a}$; (6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

(7) $(\sin x)' = \cos x$; (8) $(\cos x)' = -\sin x$.

2.1.4 用导数表示实际量——变化率模型

案例1 切线的斜率

$f'(x_0)$ 的几何意义： $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线的斜率。

(1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

(2) 过切点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的法线。

如果 $f'(x_0) \neq 0$ ，法线斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$ ，所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

思考：若函数在切点处的导数 $f'(x_0)$ 存在， $f(x)$ 在点 x_0 处的一定有切线吗？反之成立吗？

例10 求曲线 $y = x^3$ 在点 $(2, 8)$ 处的切线斜率，并写出该点处的切线方程和法线方程。

解 由导数的几何意义可知，所求的切线斜率为 $k = y'|_{x=2} = 3x^2|_{x=2} = 12$

从而所求的切线方程为 $y - 8 = 12(x - 2)$ 即 $12x - y - 16 = 0$

所求法线的斜率为 $-\frac{1}{k} = -\frac{1}{12}$

于是所求的法线方程为 $y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$ 即 $x + 12y - 98 = 0$

案例2 速度、加速度

由引例可知，若物体的运动方程为 $s = s(t)$ ，则物体在时刻 t 的瞬时速度为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

因为加速度（描述速度变化的快慢程度）是速度关于时间的变化率，物体在时刻 t 的加速度为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

案例3 电流强度

电路中电荷的定向移动形成电流，通过导体横截面的电荷量 Q 与所用时间 t 之比称为电流强度，简称电流 i 。已知导体内的电荷随时间变化为 $Q = Q(t)$ ，那么在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 的平均电流 $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ，时刻 t 的电流

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

2.1.5 函数的可导性与连续性的关系

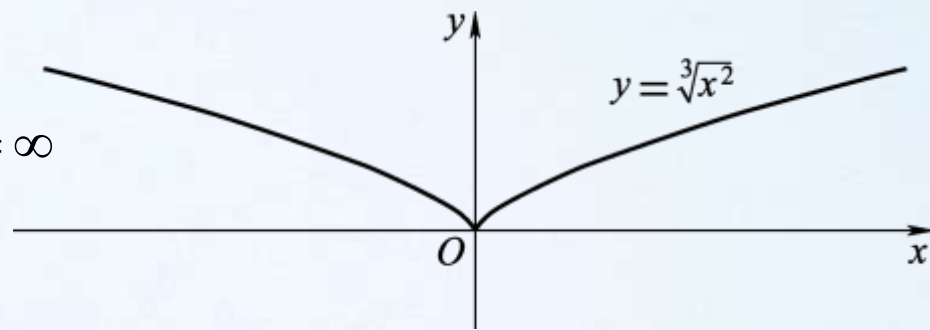
定理 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y = f(x)$ 一定在点 x_0 处连续。

例11 讨论函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导。

解 (1) 因为函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 是初等函数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，由初等函数在其定义域内每一点都连续的定理，可知函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续。

(2) 因为
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$$

显然，当 $x=0$ 时，导数不存在。



思考：曲线 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在原点 O 有切线吗？

曲线 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在原点 O 不可导，但是有切线，切线为 $x=0$ 。

2.2 导数的运算



01

导数的基本公式



02

导数的四则
运算法则



03

复合函数
的求导法则

2.2.2 导数的四则运算法则

设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 在点 x 处可导, 则 $u(x) \pm v(x), u(x) \cdot v(x), \frac{u(x)}{v(x)} (v(x) \neq 0)$, 在点 x 处也可导, 且有下列法则:

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v' ;$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv' ;$$

$$(3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0) .$$

例1 求下列函数的导数：

$$(1) y = 3x^2 - 2x + 1; \quad (2) y = \frac{2}{x} + 3\cos x - e^x; \quad (3) y = (x^2 + 1)\ln x \quad (4) y = \frac{x-1}{x+1}.$$

解 (1) $y' = (3x^2 - 2x + 1)' = (3x^2)' - (2x)' + 1' = 3(x^2)' - 2x' = 6x - 2$

$$(2) \quad y' = \left(\frac{2}{x} + 3\cos x - e^x \right)' = 2(x^{-1})' + 3(\cos x)' - (e^x)' \\ = -2x^{-2} - 3\sin x - e^x = -\frac{2}{x^2} - 3\sin x - e^x$$

$$(3) \quad y' = [(x^2 + 1)\ln x]' = (x^2 + 1)' \ln x + (x^2 + 1)(\ln x)' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x}$$

$$(4) \quad y' = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = -\frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

例2 设函数 $y = \tan x$, 求 y' 。

解

$$\begin{aligned} y' &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

用类似的方法, 还可以得到下列导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

例3 设函数 $y = x \tan x - 2 \sec x$, 求 y' 。

解

$$\begin{aligned} y' &= (x \tan x - 2 \sec x)' = (x \tan x)' - 2(\sec x)' \\ &= x' \tan x + x(\tan x)' - 2 \sec x \tan x \\ &= \tan x + x \sec^2 x - 2 \sec x \tan x \end{aligned}$$

3.2.2 反函数的求导法则

定理 2 如果函数 $x = f(y)$ 在区间内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y = f(x)$ 在相应区间上也可导.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \text{ 或 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

注：一个函数的反函数的导数等于该函数导数的倒数。

例4 求 $y = \arcsin x$ 的导数

解 $y = \arcsin x$ 的反函数 $x = \sin y$, 在 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调可导,

$$\text{且 } x'_y = (\sin y)' = \cos y \neq 0 \quad \therefore y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\because y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \therefore \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\therefore y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{即 } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \text{同理可得 } (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

练习：求 $y = \arctan x$ 的导数.

导数的基本公式

$$(1) (c)' = 0 ;$$

$$(2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} ;$$

$$(3) (a^x)' = a^x \ln a ;$$

$$(4) (e^x)' = e^x ;$$

$$(5) (\log a^x)' = \frac{1}{x \ln a} ;$$

$$(6) (\ln x)' = \frac{1}{x} ;$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x ;$$

$$(8) (\cos x)' = -\sin x ;$$

$$(9) (\tan x)' = \sec^2 x ;$$

$$(10) (\cot x)' = -\csc^2 x ;$$

$$(11) (\sec x)' = \sec x \tan x ;$$

$$(12) (\csc x)' = -\csc x \cot x ;$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} ;$$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} .$$

2.2.3 复合函数的求导法则

设 $u = \phi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数

$y = f[\phi(x)]$ 在 x 处也可导，并且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

或

$$y'(x) = f'(u) \cdot \phi'(x)$$

或记为

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

本法则可推广到有限次复合的情形：

如 $y = f(u)$, $u = \phi(v)$, $v = \psi(x)$ ，则复合函数 $y = f\{\phi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

例5 设函数 $y = \sin 2x$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解 $y = \sin 2x$ 是由 $y = \sin u, u = 2x$ 复合而成的, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\sin u)'(2x)' = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

例6 设函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = x^2 + 1$ 复合而成的, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\sqrt{u})'(x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

练习: 求 $y = e^{x^3}, y = \sqrt[3]{1 - 2x^2}$ 的导数。

注: 复合函数求导数熟练后, 中间变量可以不必写出。

注： 复合函数求导数熟练后，中间变量可以不必写出.

例7 设函数 $y = \cos(3x+1)$ ，求 y' 。

解
$$y' = -\sin(3x+1)(3x+1)' = -3\sin(3x+1)$$

例8 设函数 $y = \ln(x^2-1)$ ，求 y' 。

解
$$y' = \frac{1}{x^2-1}(x^2-1)' = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$$

练习： 求 $y = \ln \cos e^x$ ， $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$ 的导数.

例9 设函数 $y = \sin(x \ln x)$, 求 y' .

解 先用复合函数求导公式, 再用乘法公式

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x \ln x) \cdot (x \ln x)' = \cos(x \ln x) \cdot (x \cdot (\ln x)' + x' \ln x) \\ &= (1 + \ln x) \cos(x \ln x). \end{aligned}$$

练习: 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数。

例10 设函数 $y = x\sqrt{1-x}$, 求 y' 。

解 先用乘法公式求导, 遇到复合时再用复合函数求导.

$$\begin{aligned} y' &= (x\sqrt{1-x})' = x'\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})'x \\ &= \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)'x = \sqrt{1-x} + \frac{-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

例11 设函数 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 y' .

解 先用除法的导数公式, 遇到复合时, 再用复合函数求导法则.

$$y' = \frac{(x)'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

练习: 求函数 $[\sin 2x \ln(1-x)]'$.

2.3 高阶导数



01

高阶导数的定义



02

高阶导数的计算

2.3.1 高阶导数的定义

定义 若函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是可导函数，则称 $y' = f'(x)$ 的导数为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}$$

类似地，二阶导数 y'' 的导数称为函数 $f(x)$ 的三阶导数，记为 y''' ；三阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的四阶导数，记为 $y^{(4)}$ ， $\dots$ ， $(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}$ 的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$ 。二阶及二阶以上的导数统称高阶导数。

2.3.1 高阶导数的定义

例1 设函数 $y = x^4 + x^3 - x^2 + 1$, 求 y'' 。

解 $y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x, y'' = 12x^2 + 6x - 2$

例2 设函数 $y = \sin^2 x$, 求 y'' 。

解 $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, y'' = 2 \cos 2x$

例3 设函数 $y = e^{-x} \cos 2x$, 求 y'' 。

解

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x \\ y'' &= (-e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x)' = -(e^{-x} \cos 2x)' - 2(e^{-x} \sin 2x)' \\ &= -(-e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x) - 2(-e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x)' \\ &= 5e^{-x} \cos 2x + 4e^{-x} \sin 2x. \end{aligned}$$

例4 设函数 $y = e^x$, 求 y'' 。

解 $y' = e^x, y'' = e^x, \dots, y^{(n-1)} = e^x \quad y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

例5 设函数 $y = \ln(x-1) \quad (x > 1)$, 求 $y^{(n)}$ 。

解 $y' = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \quad y'' = -1(x-1)^{-2}$

$$y''' = (-1)(-2)(x-1)^{-3} \quad y^{(4)} = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}$$

依次类推, 可得 $y^{(n)} = [\ln(x-1)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

例6 设函数 $y = \sin x$, 求 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

• • • • •

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

即: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

同理可证: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

例7 证明:函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足关系式 $y^3 y'' + 1 = 0$.

$$\text{证明: } y' = \left(\sqrt{2x - x^2} \right)' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \right)' = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x)(\sqrt{2x - x^2})'}{2x - x^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x) \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \frac{-2x + x^2 - (1 - x)^2}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3} = -\frac{1}{y^3} \quad \therefore y^3 y'' + 1 = 0.$$

练习: 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出: (1) $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y''}{(y')^3}$; (2) $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

例8 设一物体的运动方程为 $s = A\sin\frac{\pi t}{3}$ ，求物体在 $t=1$ 时刻的速度和加速度。

解 物体在任意时刻 t 处的速度和加速度分别为

$$v = s'(t) = A\left(\sin\frac{\pi t}{3}\right)' = A\cos\frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi A}{3}\cos\frac{\pi t}{3}$$

$$a = v'(t) = -\frac{\pi A}{3}\sin\frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2 A}{9}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

所以

$$v|_{t=1} = \frac{\pi A}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi A}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi A$$

$$a|_{t=1} = -\frac{\pi^2 A}{9}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2 A}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} A$$

3.4 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数



01

隐函数的导数



02

由参数方程确定的
函数的导数



03

对数求导法

2.4.1 隐函数的导数

用解析法表示函数通常有两种不同的方式：一种是由 $y = f(x)$ 的形式给出的自变量为 x 的函数 y ，称为显函数，如 $y = x^2 + 3$, $y = \ln \cos x$, $s = e^t \sin t$ 等均为显函数；另一种是由方程 $F(x, y) = 0$ 的形式所确定的自变量为 x 的函数 y ，称为隐函数。

例1 求由方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 所确定的隐函数的导数 y' 。

解 将方程的两边同时对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，则 y^2 是 x 的复合函数，利用导数基本公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，得

$$(x^2)' + (y^2)' = (R^2)'$$

$$\text{即} \quad 2x + 2yy' = 0$$

$$\text{解出 } y' \text{ 得} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

例2 求由方程 $xy = e^x - e^y$ 所确定的函数 y 的导数 $x=0$ 。

解 将方程两边同时对 x 求导，得 $(xy)' = (e^x)' - (e^y)'$

即 $y + xy' = e^x - e^y y'$

解出 y' 得 $y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$

由原方程知，当 $x=0$ 时， $y=0$ 。所以 y 在 $x=0$ 处的导数为

$$y'|_{(0,0)} = \frac{e^0 - 0}{0 + e^0} = 1$$

由以上两例可以得出求隐函数的导数 y' 的方法：

求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 y' 时，将方程 $F(x, y) = 0$ 的两边同时对自变量 x 求导，注意到 y 是 x 的函数， y 的函数则是 x 的复合函数，利用导数基本公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，解出 y' ，就得到隐函数的导数。

例3 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 处的切线方程和法线方程。

解 将方程两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{2}{9}x + \frac{2}{4}yy' = 0$$

整理得

$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

由导数的几何意义可知, 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 处的切线斜率和法线斜率分别为

$$k_{\text{切}} = y' \bigg|_{\substack{x=\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y=1}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, k_{\text{法}} = -\frac{1}{k_{\text{切}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

切线方程为

$$y - 1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

法线方程为

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

练习: 求曲线 $x^2 + y^4 = 17$ 在 $x = 4$ 处对应于曲线上的点的切线方程。

例4 设 $y = \arccot(x^2 + y)$, 求 y' 。

解 方程两端对 x 求导, 得

$$y' = -\frac{1}{1 + (x^2 + y)^2} (2x + y')$$

解得

$$y' = \frac{-2x}{2 + (x^2 + y)^2}$$

例5 求由方程 $xe^y - y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 y'' 。

解 方程两端对 x 求导, 得

$$e^y + xe^y y' - y' = 0, y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

上式两端同时对 x 求导, 得

$$e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' - y'' = 0$$

解得二阶导数为

$$y'' = \frac{e^y y' (2 + xy')}{1 - xe^y}$$

将 x 代入上式, 整理得

$$y'' = \frac{e^{2y} (2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3}$$

2.4.2 对数求导法

定义：形如 $y = u(x)^{v(x)}$ 的函数称为对数函数。

例8 求 $y = x^x$ ($x > 0$) 的导数。

解 对等式两边同时取自然对数，得 $\ln y = x \ln x$

两边同时对 x 求导，得 $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$

所以 $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

练习： 设 $y = (\tan x)^x$ ，求 y' 。

例9 求函数 $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$ 的导数。

解 将等式两边取自然对数得 $\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+3) - \ln(x+4)]$

将上式两端同时对 x 求导得 $\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right)$

于是

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \end{aligned}$$

练习： 设 $y = \frac{\sqrt{x+5}}{(x+2)^2(1-x)^4}$ ，求 y' 。

2.4.3 由参数方程确定的函数的导数

参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases} t \in I$ 根据复合函数的求导法则与反函数的导数公式求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

例6 求由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 所确定的函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

解 因为 $y'(t) = b \cos t$, $x'(t) = -a \sin t$ 。所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$$

例7 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时曲线上的点的切线方程。

解 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, 摆线上的点为 $P\left(\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a, a\right)$, 因此

$$y'(t) = a \sin t, x'(t) = a(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

点 P 处的导数为

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

故摆线在点 P 处的切线方程为

$$y - a = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a$$

即

$$y = x + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a$$

3.3 高阶导数



01

高阶导数的定义



02

高阶导数的计算

2.3.1 高阶导数的定义

定义 若函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是可导函数，则称 $y' = f'(x)$ 的导数为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}$$

类似地，二阶导数 y'' 的导数称为函数 $f(x)$ 的三阶导数，记为 y''' ；三阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的四阶导数，记为 $y^{(4)}$ ， $\dots$ ， $(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}$ 的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$ 。二阶及二阶以上的导数统称高阶导数。

2.3.1 高阶导数的定义

例1 设函数 $y = x^4 + x^3 - x^2 + 1$, 求 y'' 。

解 $y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x, y'' = 12x^2 + 6x - 2$

例2 设函数 $y = \sin^2 x$, 求 y'' 。

解 $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, y'' = 2 \cos 2x$

例3 设函数 $y = e^{-x} \cos 2x$, 求 y'' 。

解

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x \\ y'' &= (-e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x)' = -(e^{-x} \cos 2x)' - 2(e^{-x} \sin 2x)' \\ &= -(-e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x) - 2(-e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x)' \\ &= 5e^{-x} \cos 2x + 4e^{-x} \sin 2x. \end{aligned}$$

例4 设函数 $y = e^x$, 求 y'' 。

解 $y' = e^x, y'' = e^x, \dots, y^{(n-1)} = e^x \quad y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

例5 设函数 $y = \ln(x-1) \quad (x > 1)$, 求 $y^{(n)}$ 。

解 $y' = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \quad y'' = -1(x-1)^{-2}$

$$y''' = (-1)(-2)(x-1)^{-3} \quad y^{(4)} = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}$$

依次类推, 可得 $y^{(n)} = [\ln(x-1)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

例6 设函数 $y = \sin x$, 求 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

即: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

同理可证: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

例7 证明:函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足关系式 $y^3 y'' + 1 = 0$.

$$\text{证明: } y' = \left(\sqrt{2x - x^2} \right)' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \right)' = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x)(\sqrt{2x - x^2})'}{2x - x^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x) \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \frac{-2x + x^2 - (1 - x)^2}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3} = -\frac{1}{y^3} \quad \therefore y^3 y'' + 1 = 0.$$

练习: 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出: (1) $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y''}{(y')^3}$; (2) $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

例8 设一物体的运动方程为 $s = A\sin\frac{\pi t}{3}$ ，求物体在 $t=1$ 时刻的速度和加速度。

解 物体在任意时刻 t 处的速度和加速度分别为

$$v = s'(t) = A\left(\sin\frac{\pi t}{3}\right)' = A\cos\frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi A}{3}\cos\frac{\pi t}{3}$$

$$a = v'(t) = -\frac{\pi A}{3}\sin\frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2 A}{9}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

所以

$$v|_{t=1} = \frac{\pi A}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi A}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi A$$

$$a|_{t=1} = -\frac{\pi^2 A}{9}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2 A}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} A$$

2.4 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数



01

隐函数的导数



02

由参数方程确定的
函数的导数



03

对数求导法

2.4.1 隐函数的导数

用解析法表示函数通常有两种不同的方式：一种是由 $y = f(x)$ 的形式给出的自变量为 x 的函数 y ，称为显函数，如 $y = x^2 + 3$, $y = \ln \cos x$, $s = e^t \sin t$ 等均为显函数；另一种是由方程 $F(x, y) = 0$ 的形式所确定的自变量为 x 的函数 y ，称为隐函数。

例1 求由方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 所确定的隐函数的导数 y' 。

解 将方程的两边同时对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，则 y^2 是 x 的复合函数，利用导数基本公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，得

$$(x^2)' + (y^2)' = (R^2)'$$

$$\text{即} \quad 2x + 2yy' = 0$$

$$\text{解出 } y' \text{ 得} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

例2 求由方程 $xy = e^x - e^y$ 所确定的函数 y 的导数 $x=0$ 。

解 将方程两边同时对 x 求导，得 $(xy)' = (e^x)' - (e^y)'$

即 $y + xy' = e^x - e^y y'$

解出 y' 得 $y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$

由原方程知，当 $x=0$ 时， $y=0$ 。所以 y 在 $x=0$ 处的导数为

$$y'|_{(0,0)} = \frac{e^0 - 0}{0 + e^0} = 1$$

由以上两例可以得出求隐函数的导数 y' 的方法：

求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 y' 时，将方程 $F(x, y) = 0$ 的两边同时对自变量 x 求导，注意到 y 是 x 的函数， y 的函数则是 x 的复合函数，利用导数基本公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，解出 y' ，就得到隐函数的导数。

例3 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 处的切线方程和法线方程。

解

将方程两边同时对 x 求导, 得 $\frac{2}{9}x + \frac{2}{4}yy' = 0$

整理得

$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

由导数的几何意义可知, 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 处的切线斜率和法线斜率分别为

$$k_{\text{切}} = y' \bigg|_{\substack{x=\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y=1}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, k_{\text{法}} = -\frac{1}{k_{\text{切}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

切线方程为

$$y - 1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

法线方程为

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

练习: 求曲线 $x^2 + y^4 = 17$ 在 $x = 4$ 处对应于曲线上的点的切线方程。

例4 设 $y = \arccot(x^2 + y)$, 求 y' 。

解 方程两端对 x 求导, 得

$$y' = -\frac{1}{1 + (x^2 + y)^2} (2x + y')$$

解得

$$y' = \frac{-2x}{2 + (x^2 + y)^2}$$

例5 求由方程 $xe^y - y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 y'' 。

解 方程两端对 x 求导, 得

$$e^y + xe^y y' - y' = 0, y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

上式两端同时对 x 求导, 得

$$e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' - y'' = 0$$

解得二阶导数为

$$y'' = \frac{e^y y' (2 + xy')}{1 - xe^y}$$

将 x 代入上式, 整理得

$$y'' = \frac{e^{2y} (2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3}$$

2.4.2 对数求导法

定义：形如 $y = u(x)^{v(x)}$ 的函数称为对数函数。

例8 求 $y = x^x$ ($x > 0$) 的导数。

解 对等式两边同时取自然对数，得 $\ln y = x \ln x$

两边同时对 x 求导，得 $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$

所以 $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

练习： 设 $y = (\tan x)^x$ ，求 y' 。

例9 求函数 $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$ 的导数。

解 将等式两边取自然对数得 $\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+3) - \ln(x+4)]$

将上式两端同时对 x 求导得 $\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right)$

于是

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \end{aligned}$$

练习： 设 $y = \frac{\sqrt{x+5}}{(x+2)^2(1-x)^4}$ ，求 y' 。

2.4.3 由参数方程确定的函数的导数

参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases} t \in I$ 根据复合函数的求导法则与反函数的导数公式求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

例6 求由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 所确定的函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

解 因为 $y'(t) = b \cos t$, $x'(t) = -a \sin t$ 。所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$$

例7 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时曲线上的点的切线方程。

解 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, 摆线上的点为 $P\left(\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a, a\right)$, 因此

$$y'(t) = a \sin t, x'(t) = a(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

点 P 处的导数为

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

故摆线在点 P 处的切线方程为

$$y - a = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a$$

即

$$y = x + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a$$

2.5 函数的微分及其应用



01

微分的概念



02

微分的几何意义



03

微分的运算



04

微分在近似
计算中的应用

2.5.1 微分的概念

先看一个例子：如图3-5所示，一块正方形的金属薄片，当受热膨胀后，边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 。问此薄片的面积 A 增加了多少？

由于正方形的面积 A 是边长 x_0 的函数 $A = x_0^2$ ，面积的增量 ΔA 为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

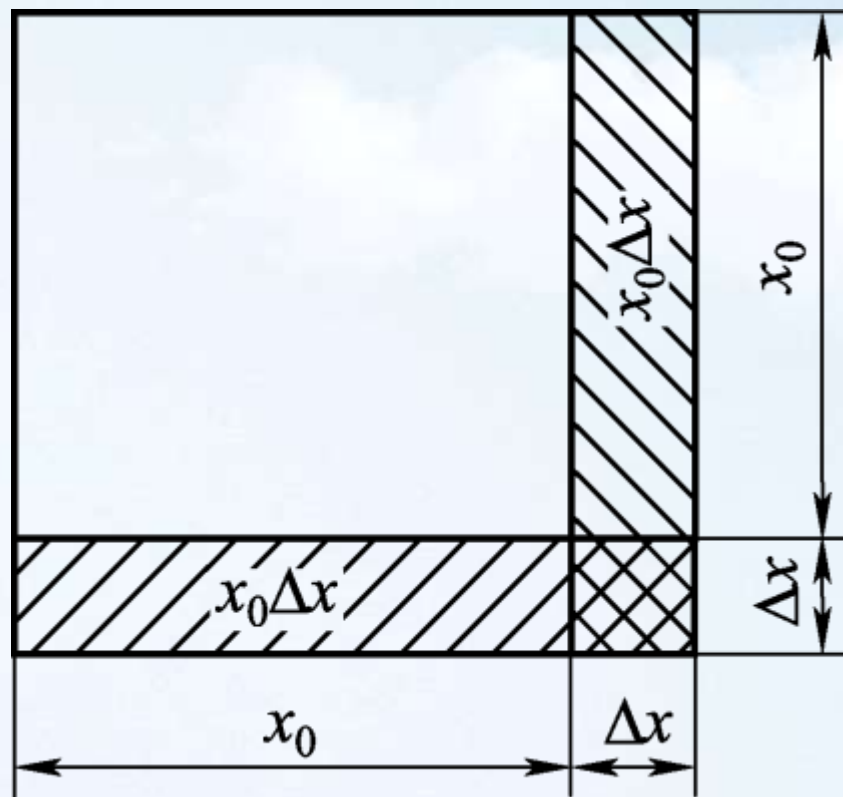


图3-5

从图3-5可以看出，当 $|\Delta x|$ 很小时，面积的增量 ΔA 可以用 $2x_0\Delta x$ 近似表示，

其中 $2x_0 = (x^2)' \Big|_{x=x_0} = A'(x_0)$ ，所以有 $\Delta A \approx A'(x_0)\Delta x$

一般地，对于函数 $y = f(x)$ ，当自变量从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，函数的增量可表示为

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

第一项中 $f'(x_0)$ 是不依赖 Δx 的常数，第二项 $\alpha(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小。

因此，当 $|\Delta x|$ 很小时， Δy 的近似值表示为 $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 Δy 的线性主部，由此给出微分的定义。

定义 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 具有导数 $f'(x_0)$ ，则称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在点 x_0 的微分，记作 dy ，即 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

通常把自变量的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx ，即 $\Delta x = dx$ 。则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成（或0）

$$dy = f'(x_0)dx$$

当函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有微分时，称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微。

一般地，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内任意点 x 的微分称为函数的微分，记作 dy ，即

$$dy = f'(x)dx$$

由 $dy = f'(x)dx$ ，得 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

导数也称微商。

例1 求 $y = x^3$ 在点 $x_0 = 1, \Delta x = 0.01$ 时函数 y 的改变量 Δy 及微分 dy 。

解

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (1 + 0.01)^3 - 1^3 = 0.030301,$$

而 $dy = (x^3)' \Delta x = 3x^2 \Delta x$, 即 $dy \Big|_{\substack{x_0=1 \\ \Delta x=0.01}} = 3 \times 1^2 \times 0.01 = 0.03.$

例2 设 $y = \ln(1+x)$, 求 dy 。

解

$$dy = (\ln(1+x))' dx = \frac{1}{1+x} dx.$$

2.5.2 微分的几何意义

如图3-6所示，点 $P(x_0, y_0)$ 和 $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上邻近的两点。 PT 为曲线在点 P 处的切线，其倾斜角为 α 。容易得到 $RT = PR \tan \alpha = f'(x_0)\Delta x = dy$ ，这就是说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分，在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处切线 PT 的纵坐标的增量 RT 。

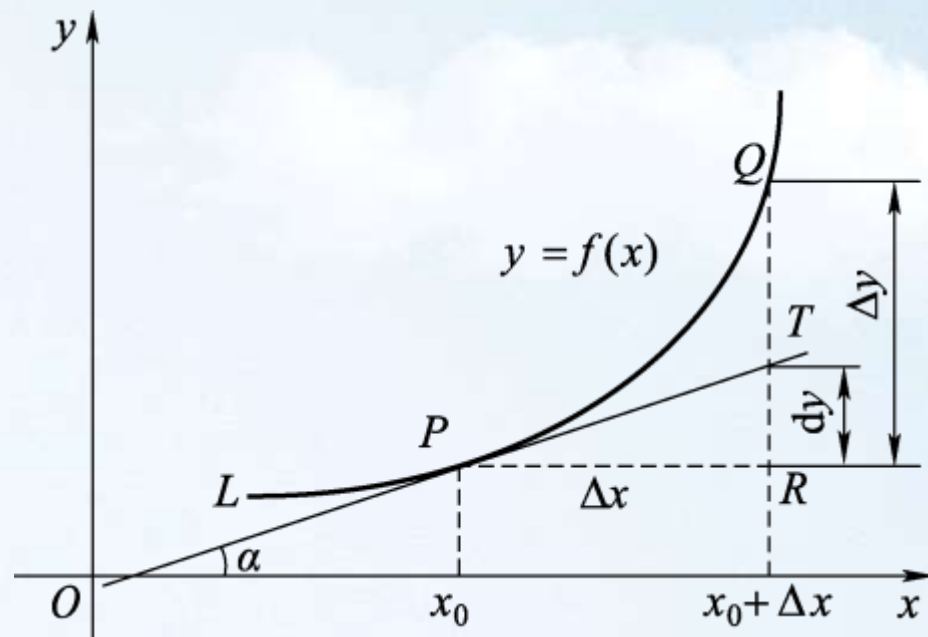


图3-6

在图3-6中, $TQ = RQ - TR$ 表示 Δy 与 dy 之差, 当 $|\Delta x|$ 很小时, TQ 与 RT 相比是微不足道的, 因此, RT 可用 TQ 近似代替。这就是说, 当 $|\Delta x|$ 很小时, 有 $\Delta y \approx dy$ 。

如图3-6所示, 当 Δy 是曲线 $y = f(x)$ 上点的纵坐标增量时, dy 就是曲线的切线上点纵坐标的相应增量。当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多, 即

$$\Delta y \approx dy$$

因此在点 P 的附近, 可以用切线段来近似代替曲线段, 即

$$PQ \approx |PT| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

2.5.3 微分的运算

1. 微分的基本公式

$$(1) d(C) = 0; \quad (2) d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx; \quad (3) d(a^x) = a^x \ln a dx;$$

$$(4) d(e^x) = e^x dx; \quad (5) d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx; \quad (6) d(\ln x) = \frac{1}{x} dx;$$

$$(7) d(\sin x) = \cos x dx; \quad (8) d(\cos x) = -\sin x dx; \quad (9) d(\tan x) = \sec^2 x dx;$$

$$(10) d(\cot x) = -\csc^2 x dx; \quad (11) d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$(12) d(\csc x) = -\csc x \cot x dx; \quad (13) d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(14) d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad (15) d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$(16) d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

设 u ， v 都是 x 的可微函数， C 为常数，则

$$(1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv ;$$

$$(2) \quad d(uv) = u dv + v du ;$$

$$(3) \quad d(Cu) = C du ;$$

$$(4) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0) .$$

3. 微分形式的不变性

由微分的定义知，当 u 是自变量时，函数 $y = f(u)$ 的微分是 $dy = f'(u)du$

如果 u 不是自变量而是 x 的可微函数 $u = \varphi(x)$ ，那么对于复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ ，根据微分的定义和复合函数的求导法则，有

$$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx$$

其中 $\varphi'(x)dx = du$ ，所以上式仍可写成 $dy = f'(u)du$

由此可见，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分总是同一个形式： $dy = f'(u)du$ ，此性质称为微分形式的不变性。

例3 设函数 $y = \sin(1 + 2x^3)$, 求 dy 。

解 方法1 直接应用微分公式 $dy = y'dx$ 计算, 则有

$$\begin{aligned} dy &= [\sin(1 + 2x^3)]' dx = \cos(1 + 2x^3) \cdot (1 + 2x^3)' dx \\ &= 6x^2 \cos(1 + 2x^3) dx \end{aligned}$$

方法2 把 $(1 + 2x^3)$ 看成中间变量 u , 则有

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin u) = \cos u du = \cos(1 + 2x^3) d(1 + 2x^3) \\ &= 6x^2 \cos(1 + 2x^3) dx. \end{aligned}$$

例4 求函数 $y = \frac{1-t}{1+t}$ 的微分 dy 。

解

$$dy = y' dt = \left(\frac{1-t}{1+t} \right)' dt = \frac{-2}{(1+t)^2} dt$$

2.5.4 微分在近似计算中的应用

函数微分是函数增量的线性主部，这就是说，当 $|\Delta x|$ 很小时，函数的增量可用其微分来近似代替，即

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)\Delta x \quad (3-1)$$

1. 计算函数增量的近似值

当 $|\Delta x|$ 很小时，可得

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$$

例5 半径为10 cm的金属圆片加热后，半径伸长了0.05 cm，问圆片面积改变了多少？

解 设圆片的半径为 r ，圆片的面积为 $A = \pi r^2$ ，于是

$$dA = 2\pi r \Delta r$$

由题意知 $r = 10 \text{ cm}$ ， $\Delta r = 0.05 \text{ cm}$ 时，圆片面积的改变量为

$$\Delta A \approx dA = 2\pi r \Delta r = 2\pi \times 10 \times 0.05 = \pi$$

则圆片面积增大了约 $\pi \text{ cm}^2$ 。

2. 计算函数值的近似值

当 $|\Delta x|$ 很小时，由式 (3-1) 可得：

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (3-2)$$

在上面公式中令 $x_0 = 0, \Delta x = x$ (当 $|x|$ 很小时) 可得

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (3-3)$$

例6 计算 $\sin 45^\circ 30'$ 的近似值。

解 设 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$ 。

因 $45^\circ 30' = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}$, 即

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \Delta x = \frac{\pi}{360}$$

由式 (3-2) 得

$$\sin 45^\circ 30' \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{360} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{360} \right) \approx 0.7133$$

例7 求证明：当 $|x|$ 较小时， $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$ 。

证 设 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}$ ，于是

$$f(0) = \sqrt[n]{1+0} = 1, f'(0) = \frac{1}{n}$$

由式 (3-3) 得 $f(x) \approx 1 + \frac{1}{n}x$

即 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$

利用式 (3-3) 可计算函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近的近似值, 同时由它可以推出常用的近似公式, 即当 $|x|$ 较小时, 有

$$(1) \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x ; \quad (2) \sin x \approx x ;$$

$$(3) \tan x \approx x ; \quad (4) \ln(1+x) \approx x ;$$

$$(5) e^x \approx 1+x ; \quad (6) \arcsin x \approx x .$$

例8 计算 $\sqrt[3]{1.03}$ 的近似值。

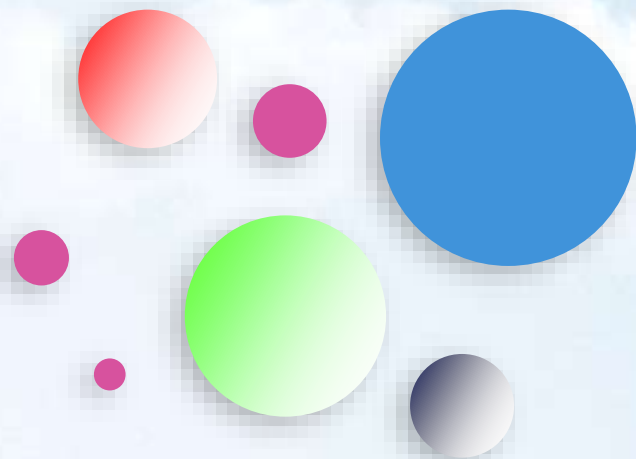
解

$$\sqrt[3]{1.03} \approx 1 + \frac{1}{3} \times 0.03 = 1.01$$

例9 求 $e^{-0.001}$ 的近似值。

解 利用公式 $e^x \approx 1 + x$ ，得

$$e^{-0.001} \approx 1 + (-0.001) = 0.999.$$



3. 误差估计

如果某个量的精确值为 A ，它的近似值为 α ，那么 $|A - \alpha|$ 称为近似值 α 的**绝对误差**，而绝对误差 $|A - \alpha|$ 与 $|\alpha|$ 的比值 $\frac{|A - \alpha|}{|\alpha|}$ 称为近似值 α 的**相对误差**。

如果某个量的精确值是 A ，测得它的近似值是 α ，又已知它的误差不超过 $\delta_A : |A - \alpha|$ ， δ_A ，则 δ_A 叫做测量 A 的**绝对误差限**（简称**绝对误差**）， $\frac{\delta_A}{|\alpha|}$ 叫做测量 A 的**相对误差限**（简称**相对误差**）。

例10 测得圆钢截面的直径 $D = 60.03 \text{ mm}$ ，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05$ 。利用公式 $A = \frac{\pi}{4} D^2$ 计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差。

解

$$\Delta A \approx dA = A' \Delta D = \frac{\pi}{2} D \Delta D, |\Delta A| \approx |dA| = \frac{\pi}{2} D |\Delta D|, \frac{\pi}{2} D \delta_D$$

已知 $D = 60.03 \text{ mm}$ ， $\delta_D = 0.05$ ，所以

$$\delta_A = \frac{\pi}{2} D \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.03 \times 0.05 = 4.715 \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$\frac{\delta_A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2} D \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.03} \approx 0.17\%$$