



本章内容



1. 代数基础知识



2. 函数的概念



3. 建立函数关系

1.1

函数的概念与性质

基本初等函数

1.2

1.3

复合函数

初等函数和分段函数

1.4

函数的概念

1.1 函数的概念与性质

1. 函数的概念

1) 函数的定义

引例1 在自由落体运动中，物体下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，下落距离 s 与时间 t 之间的依赖关系可表示为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

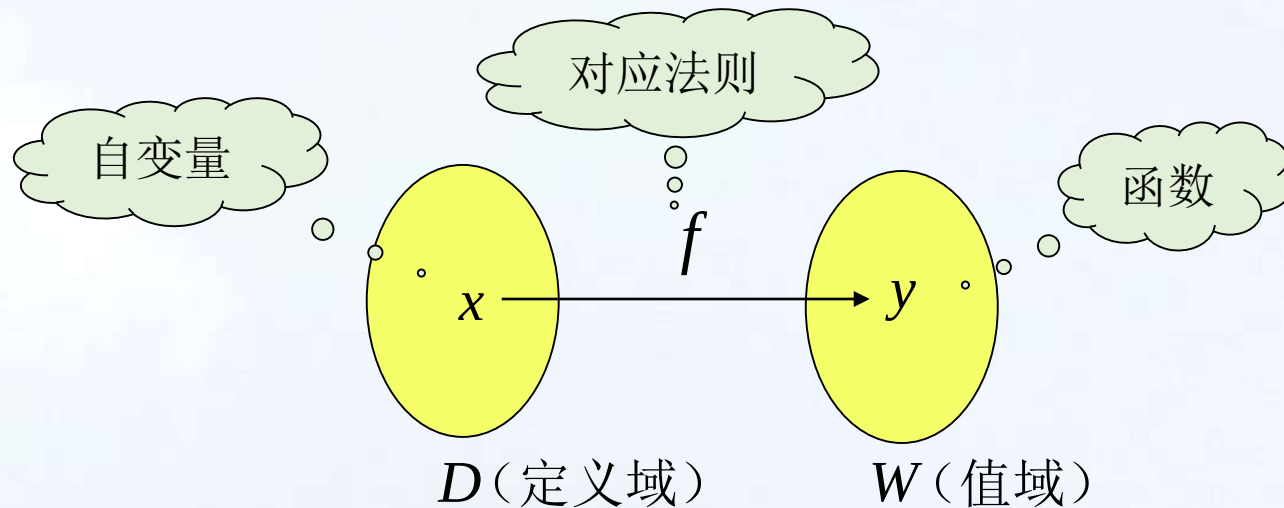
引例2 某儿童玩具的销售价格是每套20元，假设销售量是 q 套，那么销售收入 R 与销售量之间的对应关系为

$$R = 20q$$

定义1 设有两个变量 x 和 y ， D 是一个非空数集，若当变量 x 在集合 D 内任取一个值，变量 y 依照一定法则 f ，总有确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的**函数**，记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中， D 称为函数的定义域， x 称为**自变量**， y 称为**因变量**。



$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值。

函数值 y 的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 M ： $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$

例1 设函数 $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-x)$ 。

解

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 0$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) - 1 = 3x^2 + 2x - 1$$

2) 函数的两要素

把函数的定义域和对应法则称为函数的两要素。

例2 判断下列函数是否为同一函数：

(1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $g(x) = \frac{x}{x}$;

(2) $f(x) = 3\ln x$, $g(x) = \ln x^3$ 。

解

(1) 函数 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而函数 $g(x) = \frac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 故不是同一函数。

(2) 两个函数的定义域和对应法则都相同, 故是同一函数。

例3 求下列函数的定义域：

$$(1) f(x) = \frac{1}{2x - x^2} ; \quad (2) f(x) = \sqrt{x+3} + \ln(2-x) .$$

解

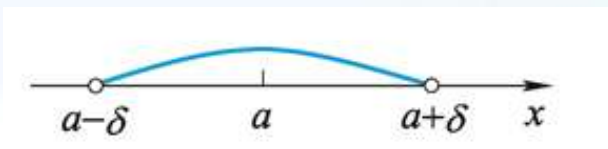
(1) 因 $2x - x^2 \neq 0$ ，解得 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 。所以函数的定义域为

$$(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

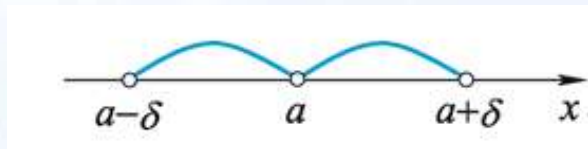
(2) 因 $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 \leq x < 2$ ，所以函数的定义域为 $[-3, 2)$ 。

定义域可以用集合的形式表示，常用到区间与邻域。

设点 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$ ，则称集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$ ，如图所示。其中， a 称为邻域中心， δ 称为邻域半径。



称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $U^\circ(a, \delta)$ ，如图所示。



3) 函数的表示法

函数通常有三种不同的表示方法：

解析法：用数学式子表示函数，也称公式法。由于表达简单，便于理论推导和运算，它在高等数学中是最常见的函数表示法。

表格法：用表格的形式表示函数，如表1-1以列表的形式给出了国内生产总值与年份之间的函数关系。

表1-1

单位：亿元

年份	2011	2012	2013	2014	2015	2016
生产总值	489 300.6	540 367.4	595 244.4	643 974.0	685 505.8	744 127.0

图像法：用图形表示函数，其优点是形象直观，可以看到函数的变化趋势，如某地一天的气温变化曲线图、上证指数K线图 etc.

2. 函数的性质

1) 奇偶性

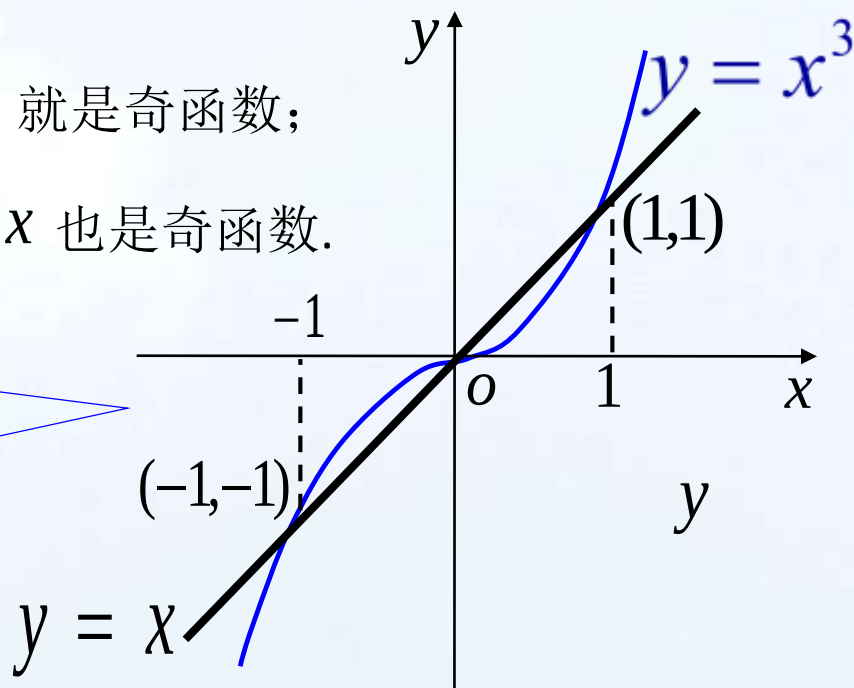
设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称（即若 $x \in D$ ，则 $-x \in D$ ），若对于任意的 $x \in D$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x \in D$ ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图像关于y轴对称，奇函数的图像关于原点对称。

如函数 $y = f(x) = x^3$ 就是奇函数；

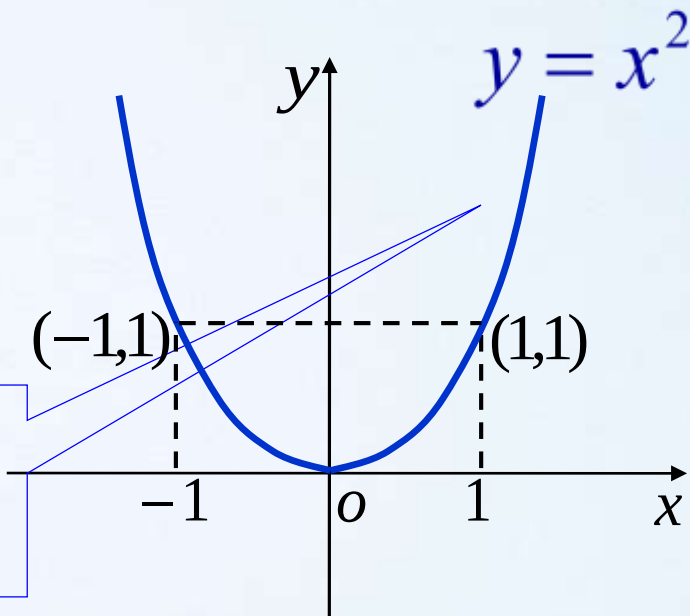
再如函数 $y = f(x) = x$ 也是奇函数。

奇函数的图形
关于坐标原点对称



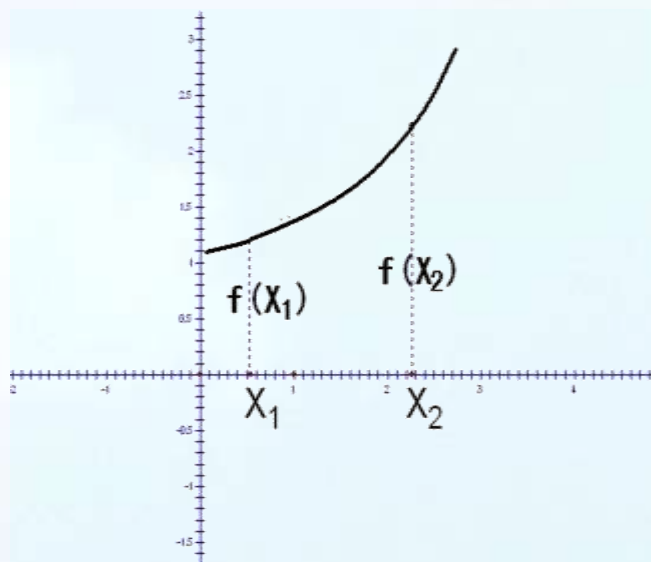
如函数 $y = f(x) = x^2$ 就是偶函数。

偶函数的图形
关于y轴对称。

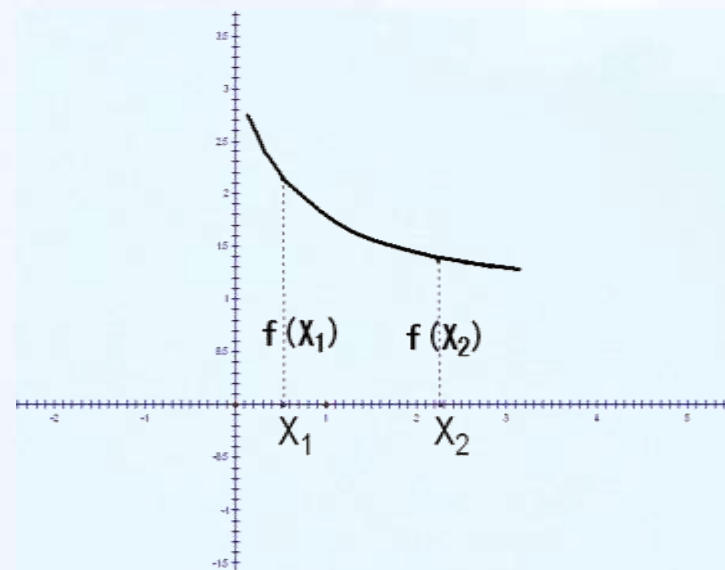


2) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，若对区间 I 内的任意两点 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 在区间 I 内单调增加，区间 I 称为**单调增区间**；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 在区间 I 内单调减少，区间 I 称为**单调减区间**。单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**。



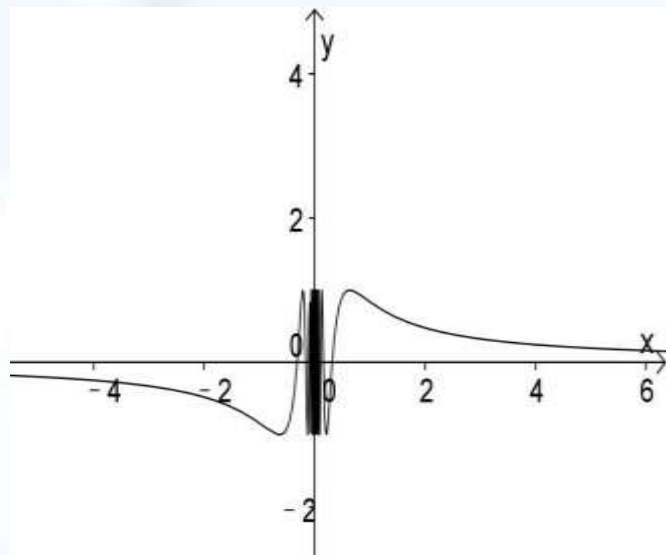
单调增加



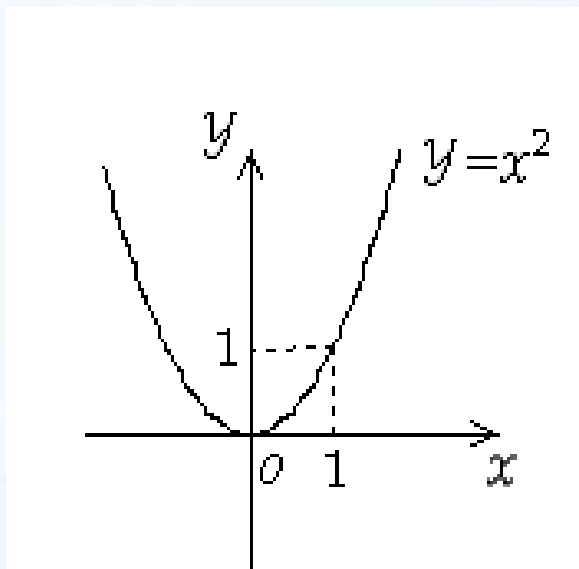
单调减少

3) 有界性

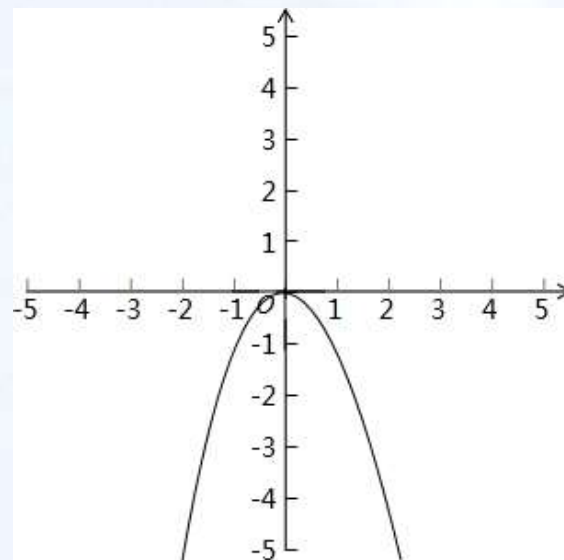
设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M ，使得与任一 $x \in I$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| < M$ ，则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界。



$y = \sin \frac{1}{x}$ 在定义域内是有界函数



$y = x^2$ 在定义域内有上界无下界



$y = -x^2$ 在定义域内有下界无上界

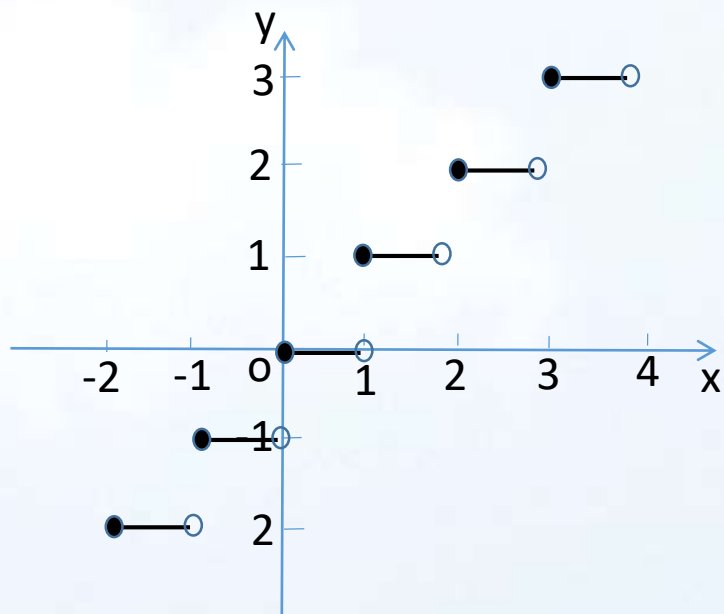
$y = \tan x$ 在定义域内是无界函数

4) 周期性

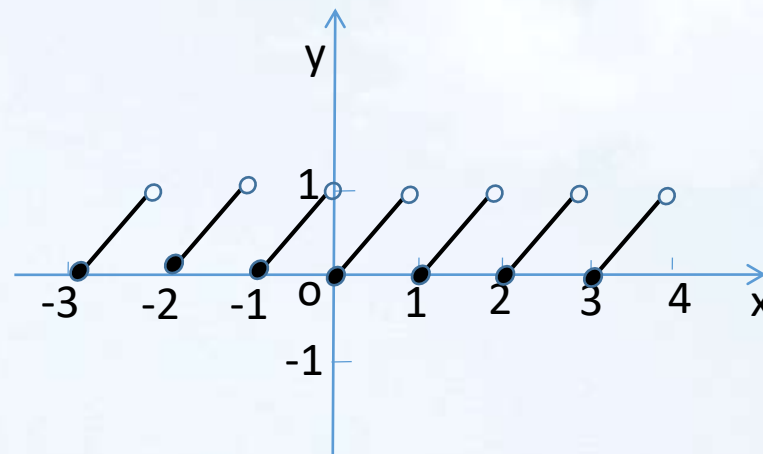
设函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在常数 $T \neq 0$ ，对于任意的 $x \in D$ ，恒有 $f(x \pm T) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

取整函数 $y = [x]$

不超过 x 的最大的整数



非负小数函数 $y = x - [x]$



狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

任何正有理数都是它的周期，
故不存在最小正周期。

3、反函数

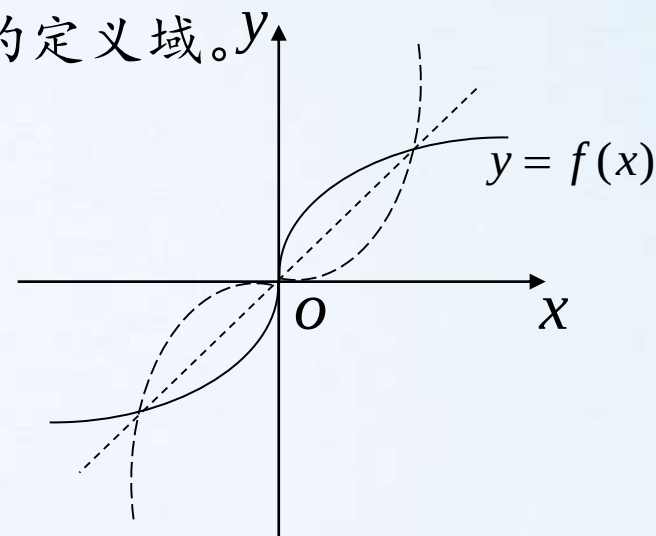
设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，值域为 M 。如果对于任意 $y \in M$ ，都有唯一确定的 $x \in D$ ，使得 $f(x) = y$ 成立，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量、 x 为因变量的新函数，称这个函数为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$ 。这时，称函数 $y = f(x)$ 为**直接函数**。

注：1.函数的定义域是其反函数的值域，函数的值域是其反函数的定义域。

2.函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称。

反函数可以通过以下两步来求解。

(1) 由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$ 。 (2) 交换字母 x 和 y 。



例4 机器原价50万元购买，已使用10年。若每年折旧率为10%(即每年减少其价值的10%)，西部企业准备出8万元购买，你觉得价格合理吗?说明理由。

解1 由题意知，经过 x 年后机器的剩余价值是 $y = 50(1-10\%)^x$ ，即 $y = 50 \cdot 0.9^x$ 。

当 $x=10$ 年，机器的剩余价值是 $y = 50 \cdot 0.9^{10} \approx 17.44 > 8$ (万元)。



解2 设 x 年后，机器的剩余价值是8万元。则

$$50(1-10\%)^x = 8$$

$$0.9^x = 0.16$$

$$x = \log_{0.9} 0.16 \approx 17.3 > 10(\text{年}).$$

指数函数: $y = a^x$
($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

对数函数:
 $y = \log_a x$
($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

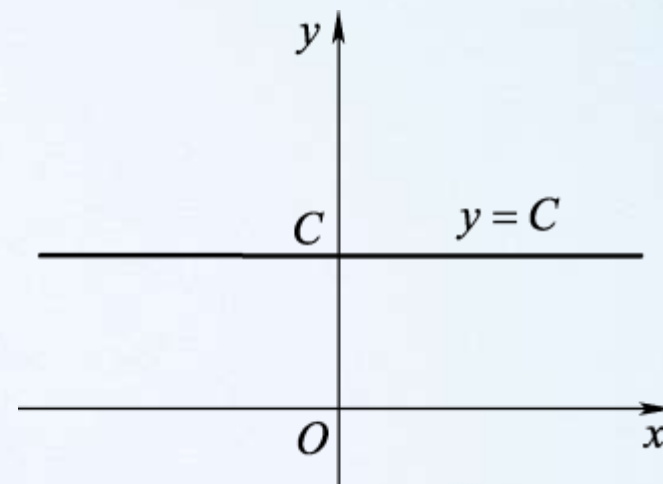


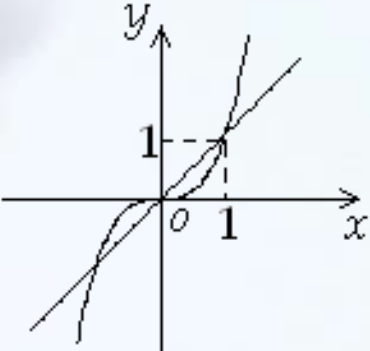
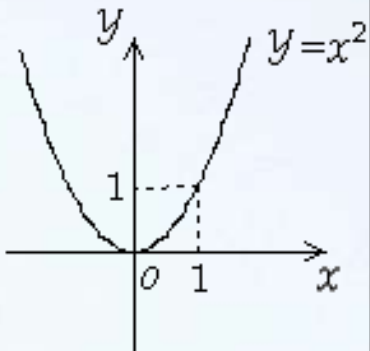
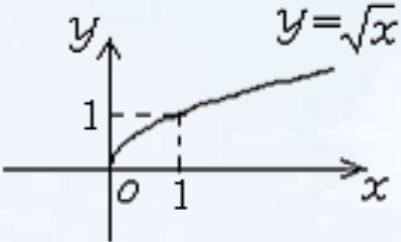
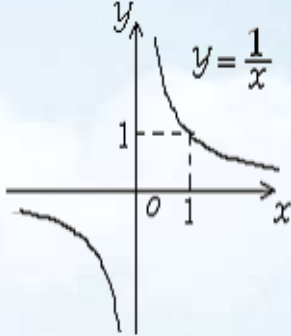
1.2 基本初等函数

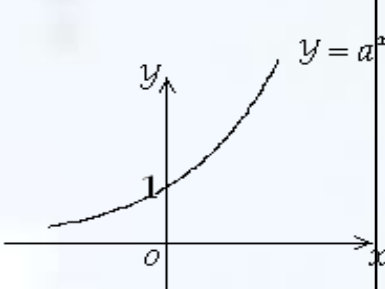
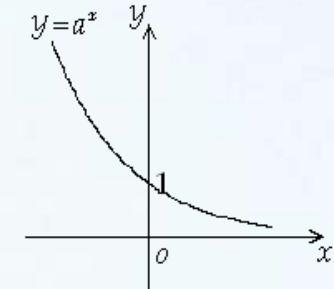
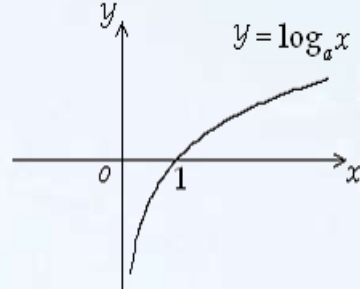
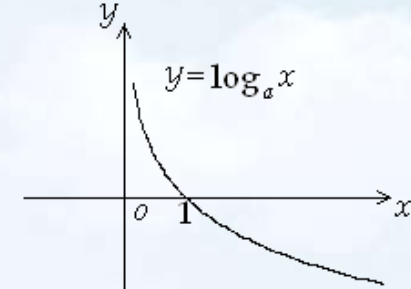
常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

1. 常数函数

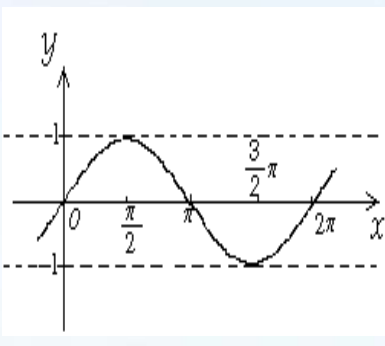
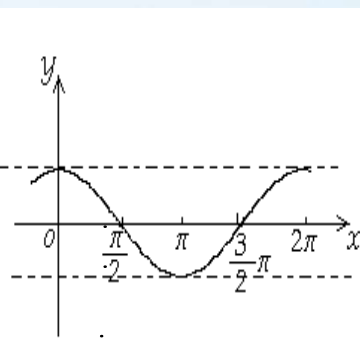
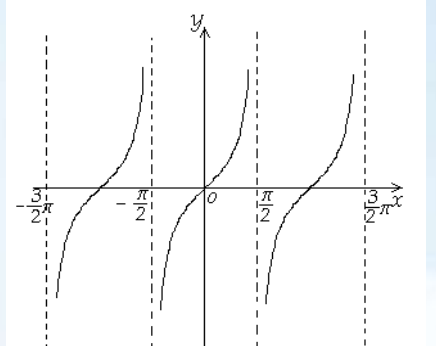
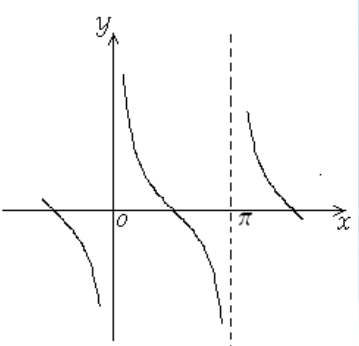
常数函数 $y=C$ (C 为常数)的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，对应法则是对于任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ ， x 所对应的函数值 y 恒等于常数 C 。其函数图像为平行于 x 轴的直线，如图所示。



函数	2 幂 函 数			
	$\mu = 1, 3$	$\mu = 2$	$\mu = \frac{1}{2}$	$\mu = -1$
图像	 图 1	 图 2	 图 3	 图 4
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇	偶	非奇非偶	奇
单调性	单增	在 $(-\infty, 0)$ 内单减 在 $(0, +\infty)$ 内单增	单增	在 $(-\infty, 0)$ 内单减 在 $(0, +\infty)$ 内单减

函数	3 指数函数		4 对数函数	
	$y = a^x (a > 1)$	$y = a^x (0 < a < 1)$	$y = \log_a x (a > 1)$	$y = \log_a x (0 < a < 1)$
图像	 图 5	 图 6	 图 7	 图 8
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
单调性	单增	单减	单增	单减

5. 三角函数

函数	$y = \sin x$		$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
图像					
定义域	$(-\infty, +\infty)$		$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$	$(k\pi, \pi + k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$
值域	$[-1, 1]$		$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇		偶	奇	非奇非偶
周期性	$T = 2\pi$		$T = 2\pi$	$T = \pi$	$T = \pi$
讨论在一个周期内的单调性	$(0, \frac{\pi}{2})$	单增	单减	在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 单减	在区间 $(0, \pi)$ 单减
	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	单减	单减		
	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	单减	单增		
	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	单增	单增		

特殊角度的三角函数值

角度制	0°	30°	45°	60°	90°	180°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0
$\cot x$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在

正割函数

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

余割函数

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

三角函数的平方关系

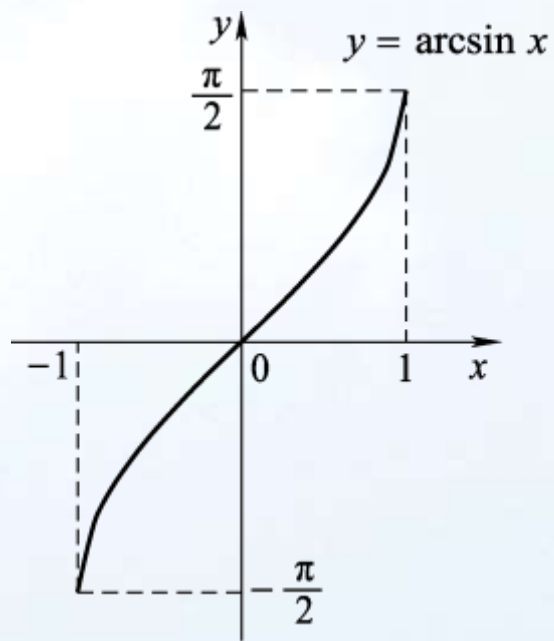
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

三角函数的倒数关系

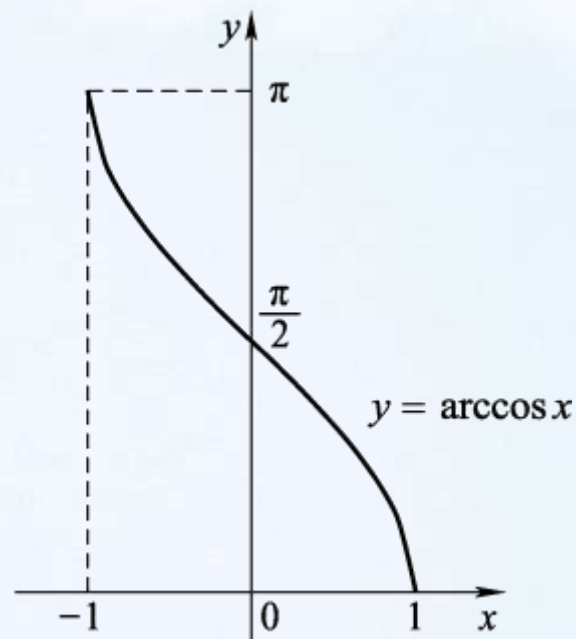
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，其定义域为 $[-1, 1]$ ，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，如图所示。

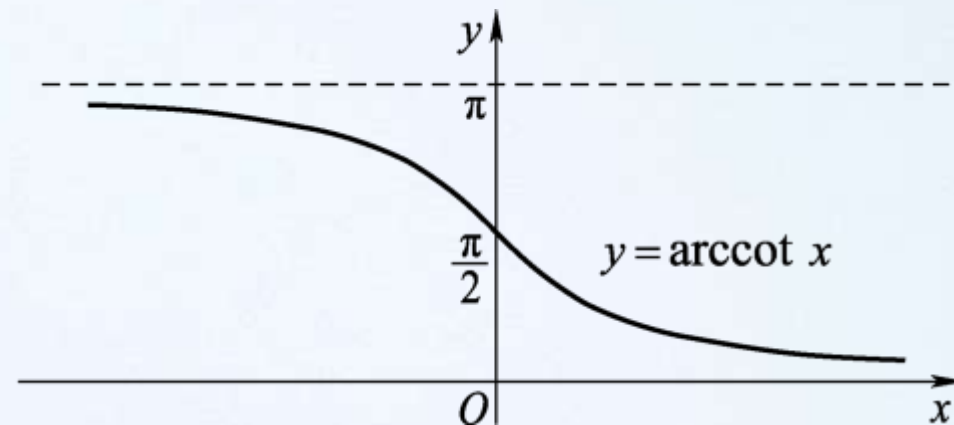
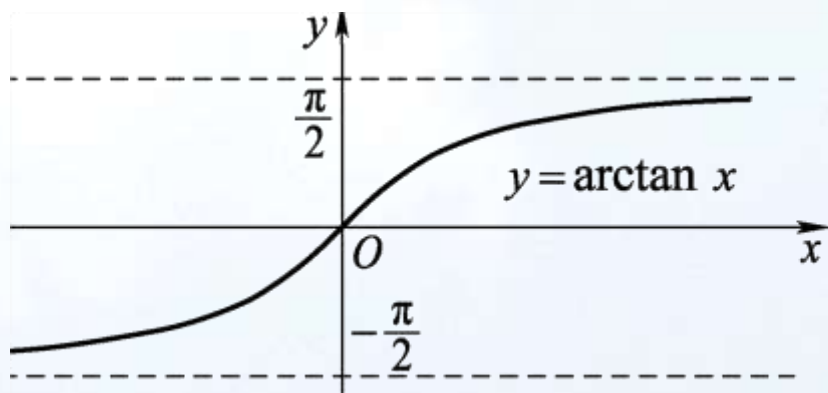


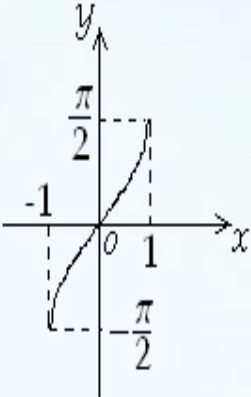
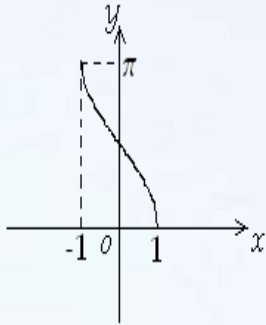
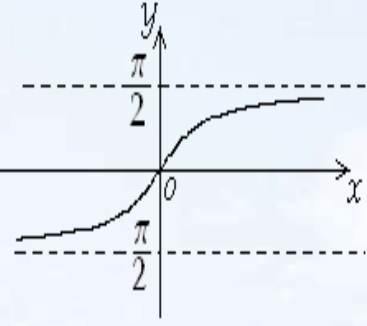
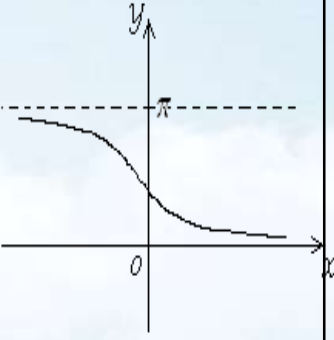
(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$ 是余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数，其定义域为 $[-1, 1]$ ，值域为 $[0, \pi]$ ，如图所示。



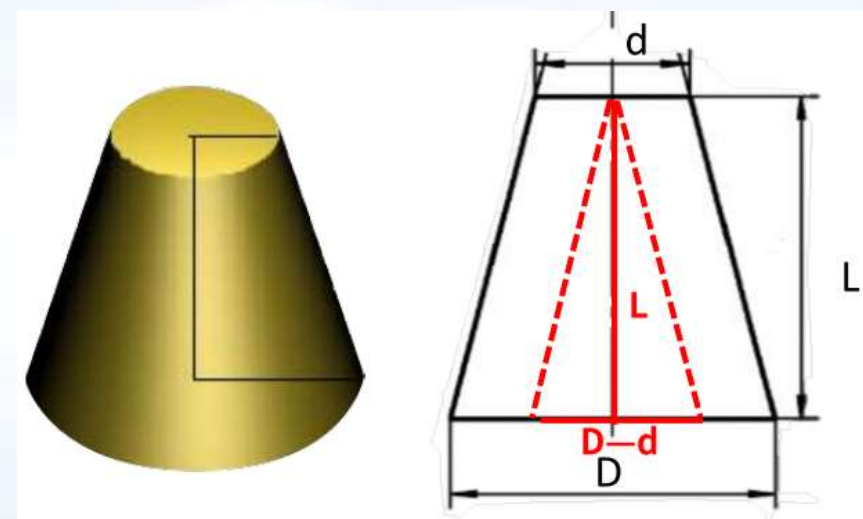
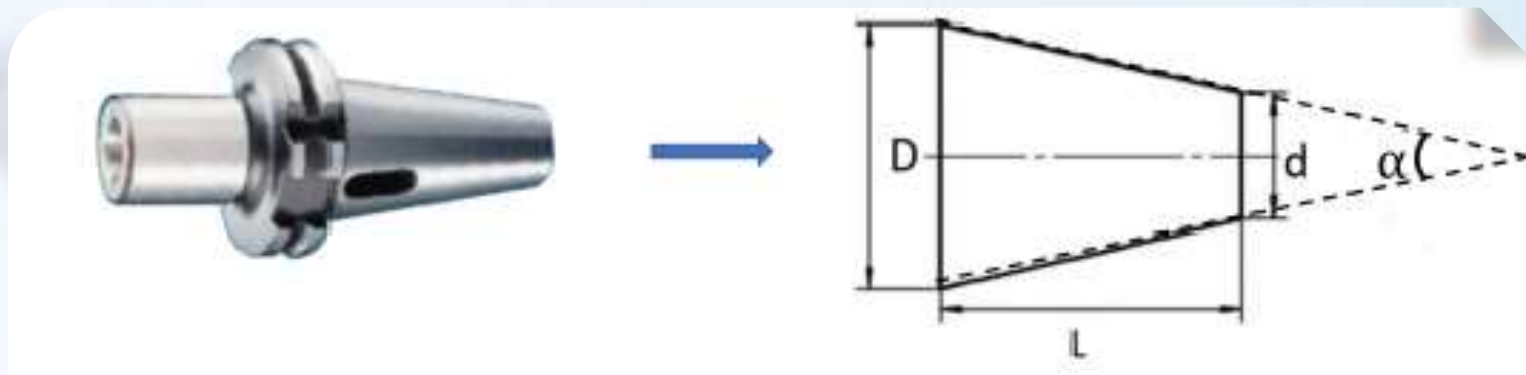
(3) 反正切函数 $y = \arctan x$ 是正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，如图所示。

(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域为 $(0, \pi)$ ，如图所示。



函数	反三角函数			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctan x$	$y = \operatorname{arccot} x$
图像	 图13	 图14	 图15	 图16
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
奇偶性	奇	非奇非偶	奇	非奇非偶
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

例5 若测得锥形零件大圆直径 $D=20\text{cm}$ ，小圆直径 $d=14\text{cm}$ ，高 $L=30\text{cm}$ 。求该零件的锥度 C ，锥角 α 。



解

$$\text{锥度 } C = \frac{D-d}{L} = \frac{20-14}{30} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{锥角 } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{D-d}{2}}{L} = \frac{C}{2} = \frac{1}{10},$$

$$\text{故 } \alpha = 2 \arctan \frac{1}{10} = 11^{\circ}25'16''.$$

圆台的锥度: $C = \frac{D-d}{L}$

1.3 复合函数

定义2 设 y 是 u 的函数， u 是 x 的函数 $y = f(u)$ 。如果 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集不是空集，则 y 通过 u 构成 x 的函数， $y = f[\varphi(x)]$ 称为 x 的复合函数，其中 u 称为中间变量。

例1 试求由函数 $y = u^3$ ， $u = \sin x$ 构成的复合函数：

解 将 $u = \sin x$ 代入 $y = u^3$ 中，得复合函数 $y = \sin^3 x$.

注：并非任意两个函数都能构成复合函数，函数的值域应该取在函数的定义域内。

例如， $y = \arcsin x$ 与 $u = x^2 + 2$ 便不能复合成一个函数，因为 $u = x^2 + 2$ 的值域为 $[2, +\infty)$ ，不包含在 $y = \arcsin x$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内，因而不能复合。

例2 写出下列函数的复合过程:

(1) $y = (1 + 2x)^3$; (2) $y = \sin^2 \frac{1}{x}$ 。

解

(1) $y = u^3, u = 1 + 2x$

(2) $y = u^2, u = \sin v, v = \frac{1}{x}$

例 3 函数 $y = a^{\cos x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的?

解 令 $u = \cos x$, 则 $y = a^u$, $u = \cos x$. 故 $y = a^{\cos x}$ 是由 $y = a^u$ 和 $u = \cos x$ 复合而成的.

熟练后, 前两步可以省略, 直接写出第三步.

复合函数的分解方法:

从外往里分解, 即先看外层函数, 再看内层函数, 直到每一层都是基本初等函数或由基本初等函数构成的和差积商函数.

例 4 函数 $y = \sqrt{\ln(2x-3)}$ 是由哪些函数复合而成的？

解 它是由 $y = \sqrt{u}$, $u = \ln v$, $v = 2x - 3$ 三个函数复合而成.

例 5 指出函数 $y = 3^{\sin^2\left(\frac{2x-1}{3\ln x+5}\right)}$ 的复合过程.

解 按照上面的原则知，它是由 $y = 3^u$, $u = v^2$, $v = \sin w$, $w = \frac{2x-1}{3\ln x+5}$ 这 4 个函数复合而成的.

注：1) 复合函数分解时，要分解到基本初等函数和常数进行有限次四则运算。

2) 多个函数可以组成复合函数，复合函数也可分解为多个函数。

1.4 初等函数和分段函数

1. 初等函数

定义3 由基本初等函数经过**有限次**的四则运算和**有限次**的复合构成，并且用**一个式子**表示的函数叫做**初等函数**。

注：无限次的运算构成的函数表达式不属于初等函数。如

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

2. 分段函数

在函数自变量不同的取值范围内所对应的函数关系也不相同,这样的函数称为分段函数。

例6 已知分段函数 $y = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 2-x, & x < 1 \end{cases}$

(1) 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$;

(2) 求其定义域, 并画出其图像。

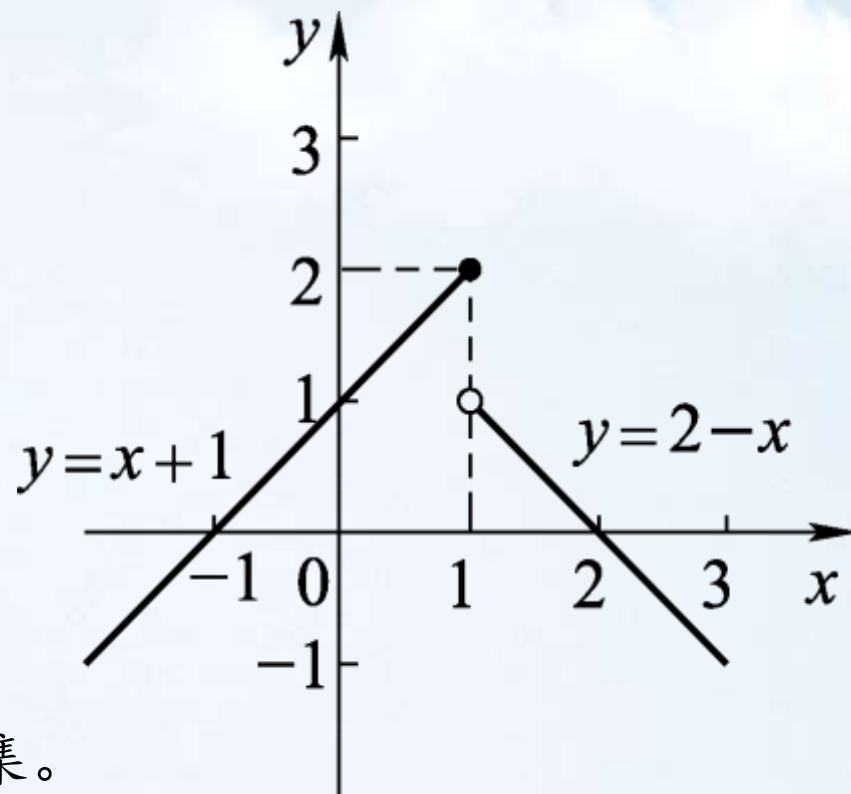
解 (1) $f(0)=0+1=1$ $f(1)=1+1=2$ $f(3)=2-3=-1$

(2) 其定义域为 $(-\infty, 1] \cup (1, +\infty) = (-\infty, +\infty)$ 。

图像如图所示。

注: 1) 分段函数的定义域是所有表达式的定义域的并集。

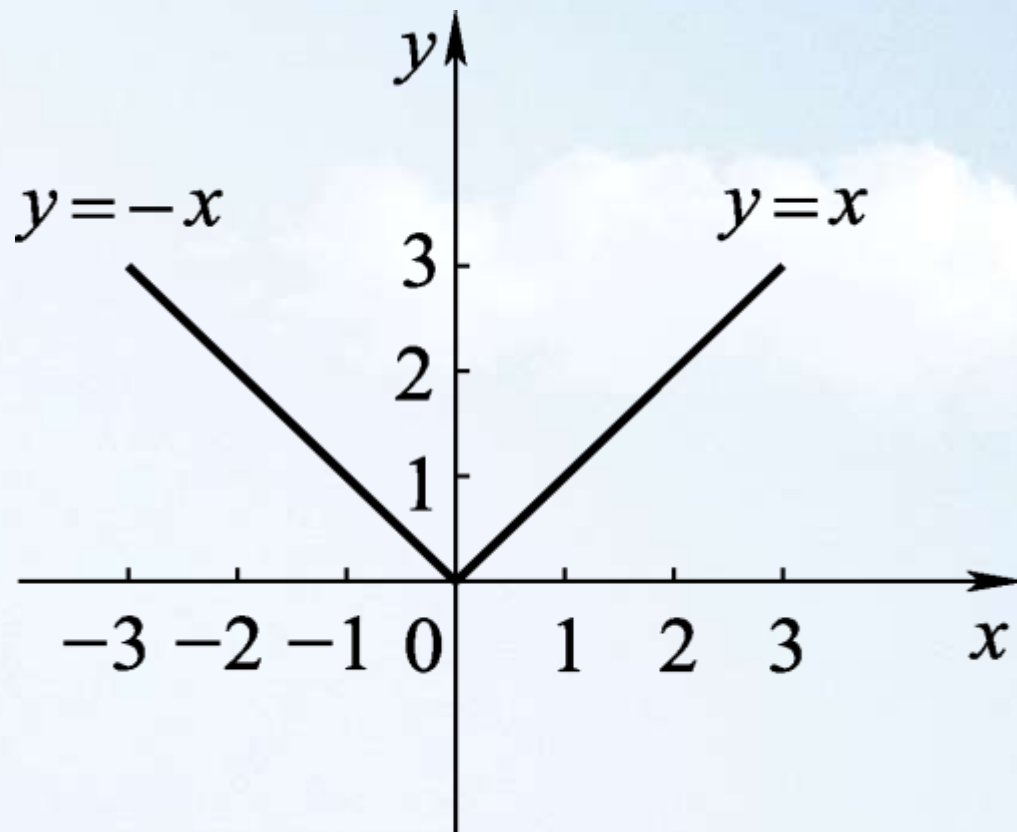
2) 分段函数一般说来不是初等函数。除非它能用另一种方式写成一个解析式。



常用的分段函数有：

1) 绝对值函数

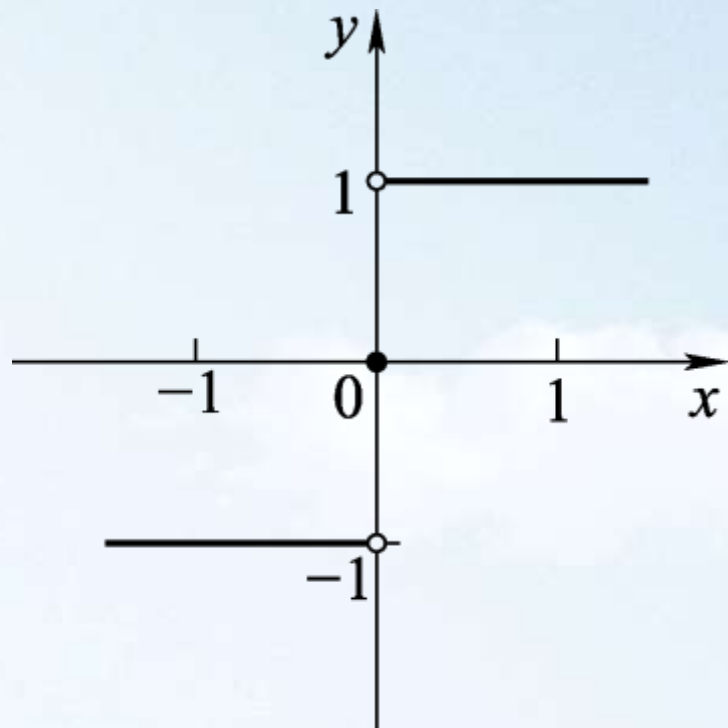
绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的图像所示。



注：分段函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 是初等函数。因为它可以写成 $y = |x| = \sqrt{x^2}$ 。

2) 符号函数

符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 的图像如图所示。



注：分段函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 不是初等函数。

思考：现实生活中有哪些可以用分段函数表示？

例 2016年北京出租车的基本收费标准是：起步价为3公里收费13元，计程标准每公里2.3元，燃油附加费全部运次加收1元。那么行驶里程数 x 公里与费用 y 元之间的关系为

解

$$y = \begin{cases} 13+1, & x \leq 3 \\ 13+(x-3) \times 2.3+1, & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 14, & x \leq 3 \\ 7.1+2.3x, & x > 3 \end{cases}$$

例 电力部门规定：居民每月用电量不超过30度时，每度电按0.5元收费；当用电量超过30度但不超过60度时，超过的部分每度按0.6元收费；当用电量超过60度时，超过部分按每度0.8元收费。试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系。

解 当 $0 \leq W \leq 30$ 时， $G = 0.5W$ ；

当 $30 < W \leq 60$ 时， $G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times (W - 30) = 0.6W - 3$ ；

当 $W > 60$ ， $G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times 30 + 0.8 \times (W - 60) = 0.8W - 15$ 。

$$\text{所以 } G = f(W) = \begin{cases} 0.5W, & 0 \leq W \leq 30 \\ 0.6W - 3, & 30 < W \leq 60 \\ 0.8W - 15, & W > 60 \end{cases}$$

单利与复利

1) 单利计算公式

设初始本金为 P_0 ，计息期（如一年）的利率为 r ，则

第一年末的本利和为 $S_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$ ；

第二年末的本利和为 $S_2 = P_0(1 + r) + P_0 r = P_0(1 + 2r)$ ；

.....

第 n 年末的本利和为 $S_n = P_0(1 + nr)$ 。

2) 复利计算公式

设本金为 P_0 ，计息期（如一年）的复利率为 r ，则

第一年末的本利和为 $S_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$ ；

第二年末的本利和为 $S_2 = P_0(1 + r) + rP_0(1 + r) = P_0(1 + r)^2$ ；

.....

第 n 年末的本利和为 $S_n = P_0(1 + r)^n$ 。

例 现有初始本金1000元，若银行储蓄的年利率为3%，问：

(1) 按单利计算，5年末的本利和是多少？

(2) 按复利计算，5年末的本利和又是多少？

解

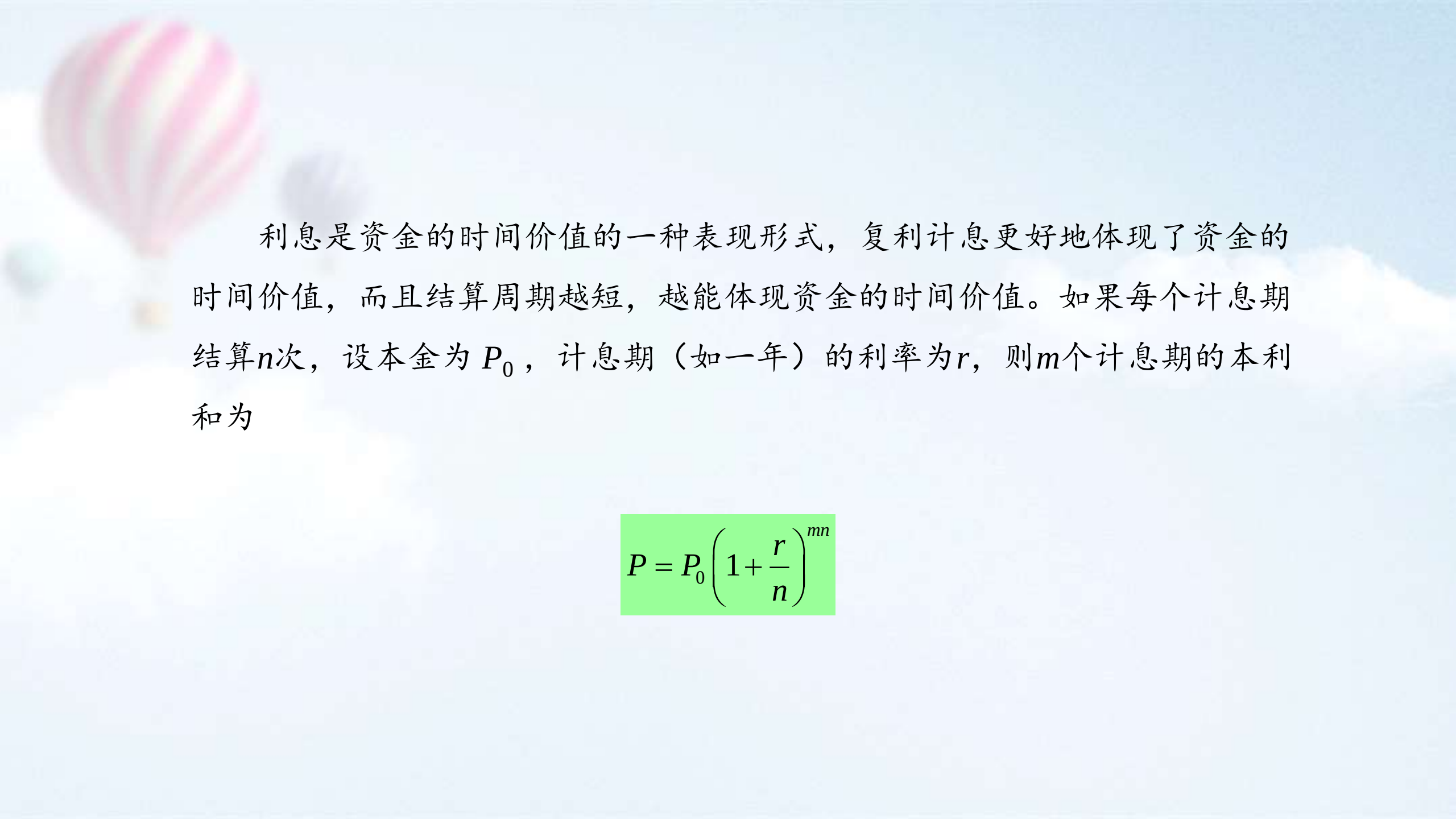
已知 $P_0 = 1000$, $r = 0.03$, 则5年末的本利和：

单利

$$S_5 = P_0(1 + 5r) = 1000(1 + 5 \times 0.03) = 1150 \quad (\text{元})$$

复利

$$S_5 = P_0(1 + r)^5 = 1000(1 + 0.03)^5 = 1159.27 \quad (\text{元})$$



利息是资金的时间价值的一种表现形式，复利计息更好地体现了资金的时间价值，而且结算周期越短，越能体现资金的时间价值。如果每个计息期结算 n 次，设本金为 P_0 ，计息期（如一年）的利率为 r ，则 m 个计息期的本利和为

$$P = P_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{mn}$$

例 设有本金为10 000元，年利率为6%，计息期五年，分别计算下列情况的本利和：

- (1) 复利计息，一年结算一次；
- (2) 复利计息，3个月结算一次。

解

- (1) 复利计息，一年结算一次，五年后的本利和为

$$S = 10\,000(1 + 0.06)^5 = 13\,382.25 \quad (\text{元})$$

- (2) 复利计息，3个月结算一次，五年后的本利和为

$$S = 10\,000 \left(1 + \frac{0.06}{4} \right)^{4 \times 5} = 13\,468.55 \quad (\text{元})$$

2.1.1 数列的极限

1. 数列

定义1 在某一法则下，当 n ($n \in \mathbf{N}^+$) 依次取 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 时，对应的实数排成一系列数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ，这列数就称为数列，记作 $\{x_n\}$ 。

数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项。

数列的分类

有限数列

无穷数列

-----极限

有界数列

无界数列

递增数列

递减数列

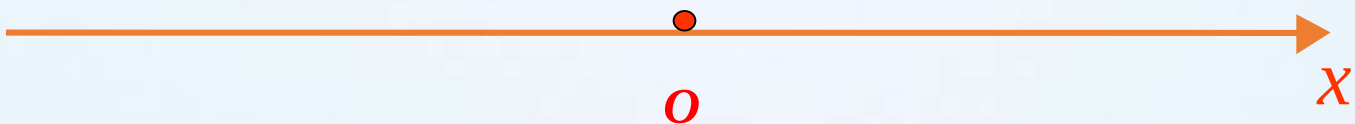
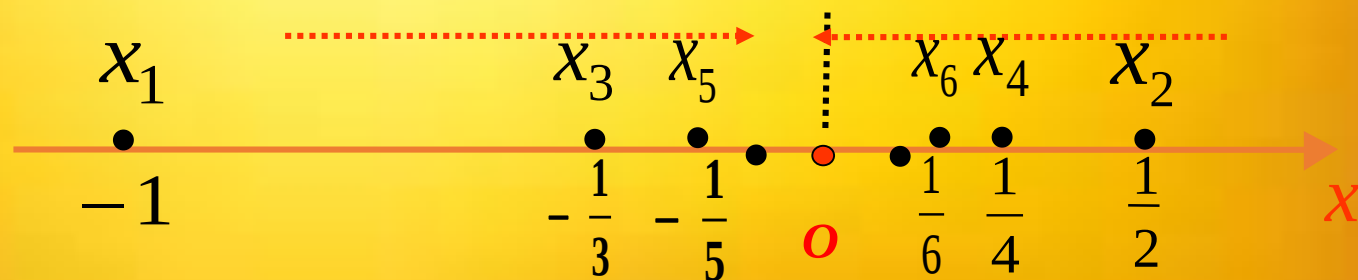
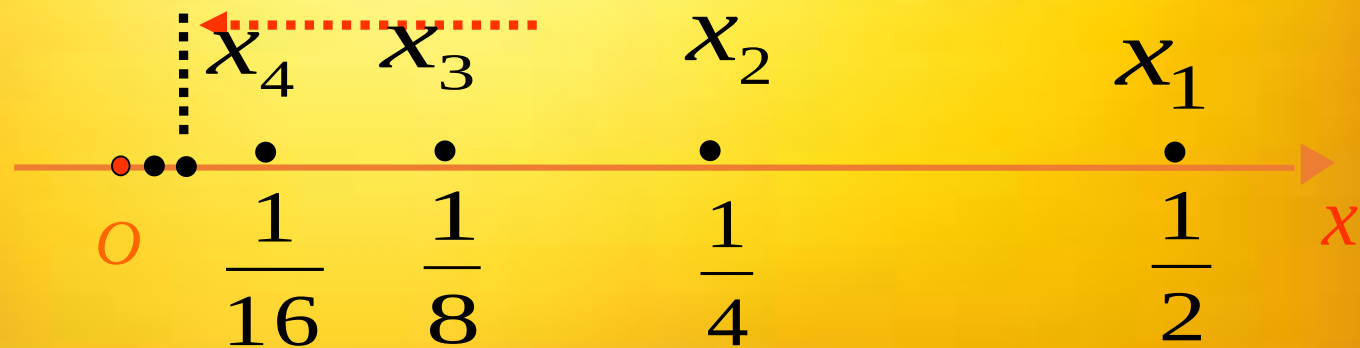
数列举例:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots ;$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots ;$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots .$$



定义2 对于数列 $\{x_n\}$ ，如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a ，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，记作

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ；如果数列没有极限，就说数列是发散的。

其中，“lim”代表极限，极限符号下面的“ $n \rightarrow \infty$ ”表示项数无限增大。

$\{x_n\}$

静态：数列每一项 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

无限

量变

x_n ($n=1,2,3,\dots$) 不一定等于 a .

有限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

动态： $n \rightarrow \infty$ 时， x_n 无限地接近于某一确定的数值 a .

质变

从有限中找到无限，从暂时中找到永久，并且使之确定起来。

-----恩格斯

例1 讨论下列数列的变化趋势，说明极限是否存在，若存在，请写出它们的极限。

$$(1) x_n = \frac{n}{n+1} ; \quad (2) x_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] ; \quad (3) x_n = \frac{1}{(-3)^n} ; \quad (4) x_n = 8 .$$

解

$$(1) x_n = \frac{n}{n+1} \text{ 的项依次为 } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots,$$

当 n 无限增大时， x_n 无限接近于1，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$(2) x_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \text{ 的项依次为 } 0, 1, 0, 1, \dots,$$

当 n 无限增大时， x_n 总是在0和1两数中跳动，

不趋近于某一个常数，所以，该数列的极限不存在。

(3) $x_n = \frac{1}{(-3)^n}$ 的项依次为 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$,

当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 0, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-3)^n} = 0$

等比级数 $\{aq^{n-1}\}$ 的极限就是 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^{n-1} = 0$ (其中 $|q| < 1$) 。

(4) $x_n = 8$ 为常数数列, 无论 n 取怎样的正整数, x_n 始终为 8, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} 8 = 8$

常数数列 $\{C\}$ 的极限就是这个常数本身, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$ (C 为常熟) 。

常用极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{不存在}, & q = -1 \end{cases}$$

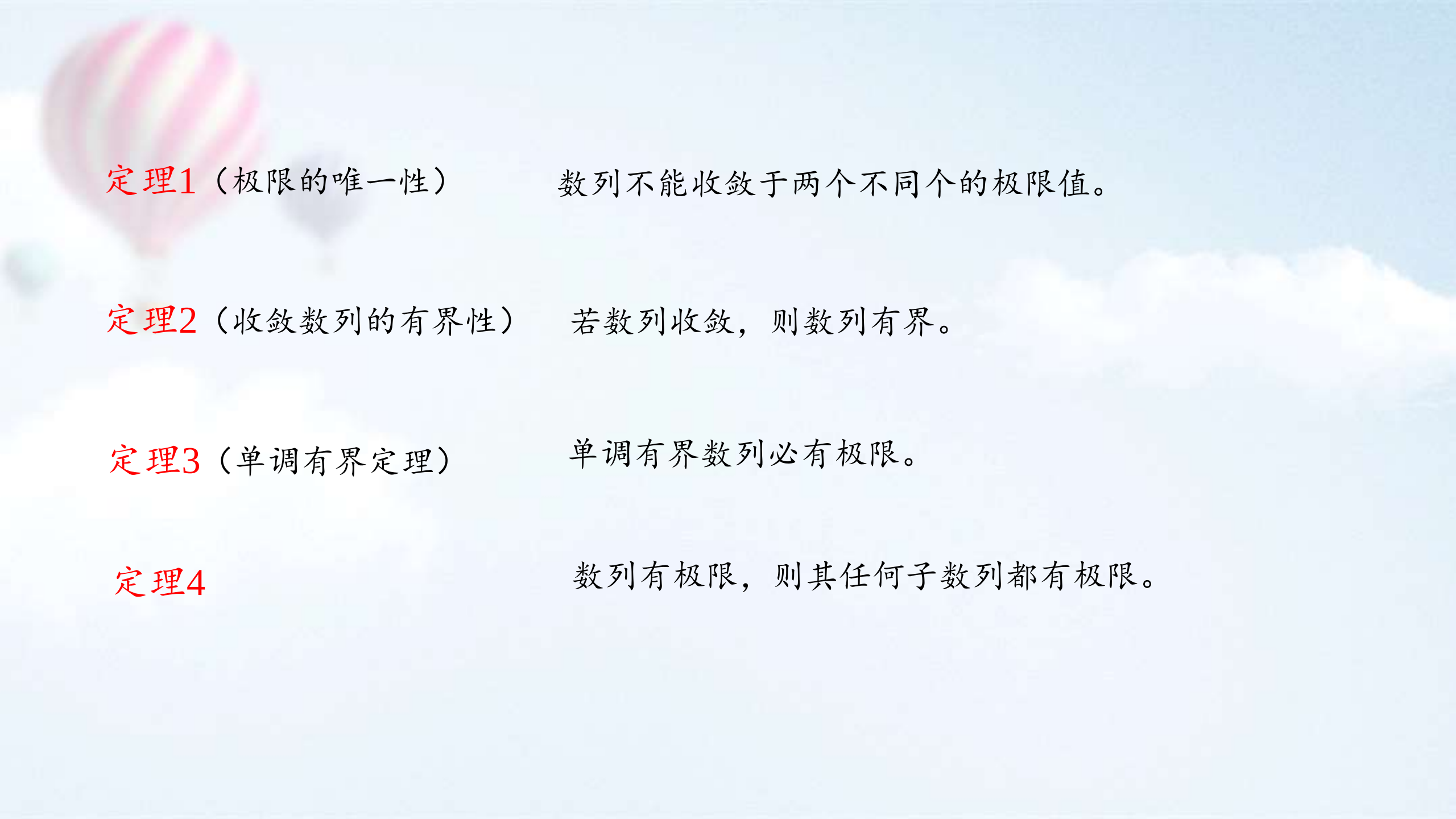
例2 讨论某单位购置一批价格100万元的设备，该设备每年的折旧费是当年价格的 $\frac{1}{10}$ ，那么随着时间的推移，该批设备的价格如何变化？

解 这批设备的价格（单位：万元）第一年为100，第二年为 $100 \times \frac{9}{10}$ ，第三年为 $100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2$ ，第四年为 $100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3$ ，……，第 n 年为 $100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ 。

当 n 无限增大（即 $n \rightarrow \infty$ ）时，由数列极限的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 0$$

所以，随着时间的推移，这批设备的价格无限接近于0。



定理1 (极限的唯一性)

数列不能收敛于两个不同的极限值。

定理2 (收敛数列的有界性)

若数列收敛，则数列有界。

定理3 (单调有界定理)

单调有界数列必有极限。

定理4

数列有极限，则其任何子数列都有极限。

2.1.2 函数的极限

规定：

(1) x 的绝对值 $|x|$ 无限增大用记号 $x \rightarrow \infty$ 表示；

x 小于0且绝对值 $|x|$ 无限增大用记号 $x \rightarrow -\infty$ 表示；

x 大于0且绝对值 $|x|$ 无限增大用记号 $x \rightarrow +\infty$ 表示。

(2) x 无限接近 x_0 用记号 $x \rightarrow x_0$ 表示；

x 从 x_0 的左侧（即 $x < x_0$ ）无限接近 x_0 用记号 $x \rightarrow x_0^-$ 表示；

x 从 x_0 的右侧（即 $x > x_0$ ）无限接近 x_0 用记号 $x \rightarrow x_0^+$ 表示。

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的极限

定义3 如果当 x 的绝对值无限增大, 即 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A , 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

请同学们类比给出下面的定义:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

例3 作出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图形，在 $x > 0$ 的前提下，讨论当 $x \rightarrow +\infty$ 时，该函数的变化趋势，并写出它的极限，写出 $x \rightarrow -\infty$ ， $x \rightarrow \infty$ 时该函数的极限。

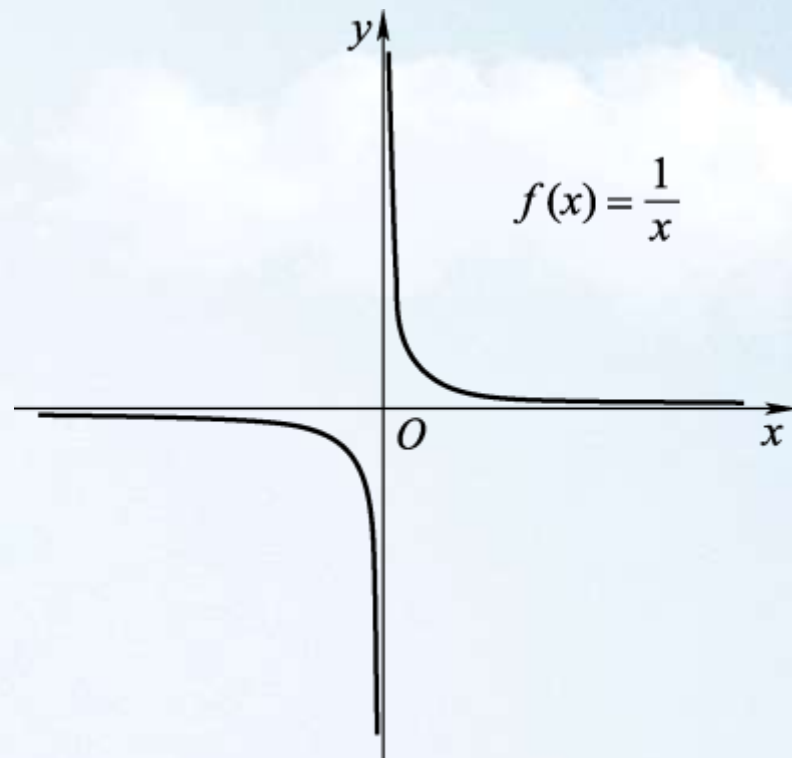
解 图形如图所示。

从图中可以看出，当 x 沿 x 轴的正方向无限增大时，曲线 $y = \frac{1}{x}$ 无限接近于 x 轴，但始终不与 x 轴相交，故当 $x \rightarrow +\infty$ 时，函数 $y = \frac{1}{x}$ 以 0 为极限。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

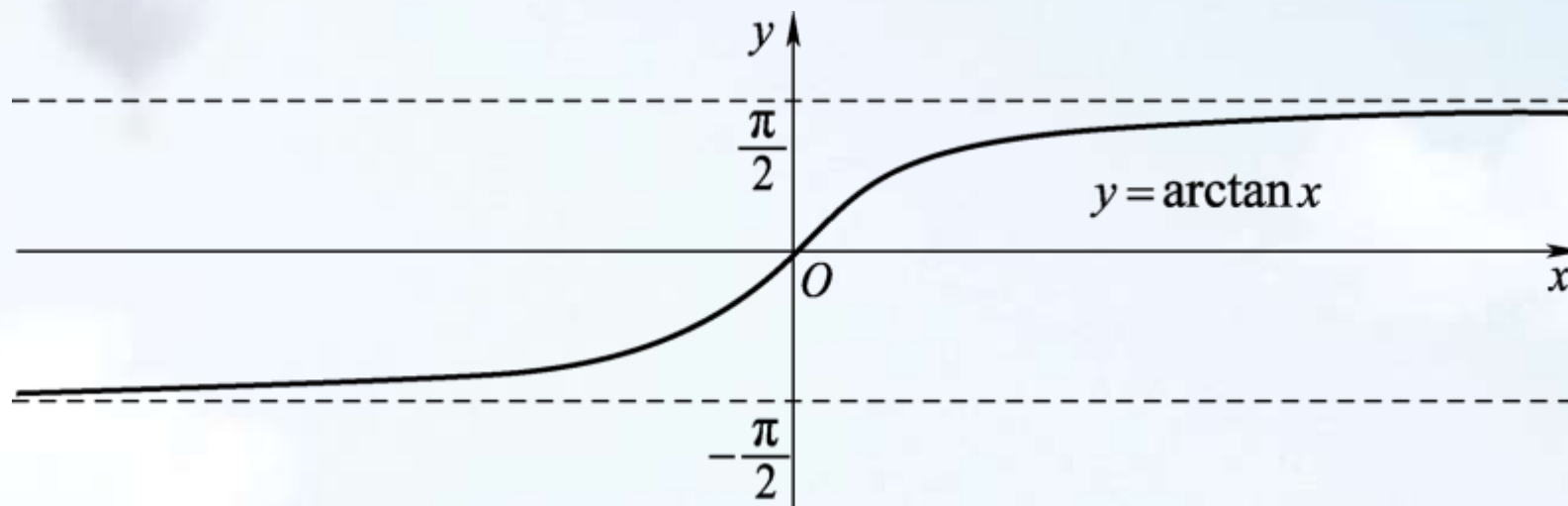
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



思考： 由上面的例子可以看出，如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 都存在并且相等，那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 也存在并且与它们相等。

例4 讨论函数 $\arctan x$ 分别在 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

解



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x \text{ 不存在}$$

思考： 由上面的例子可以看出，如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在但不相等，那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

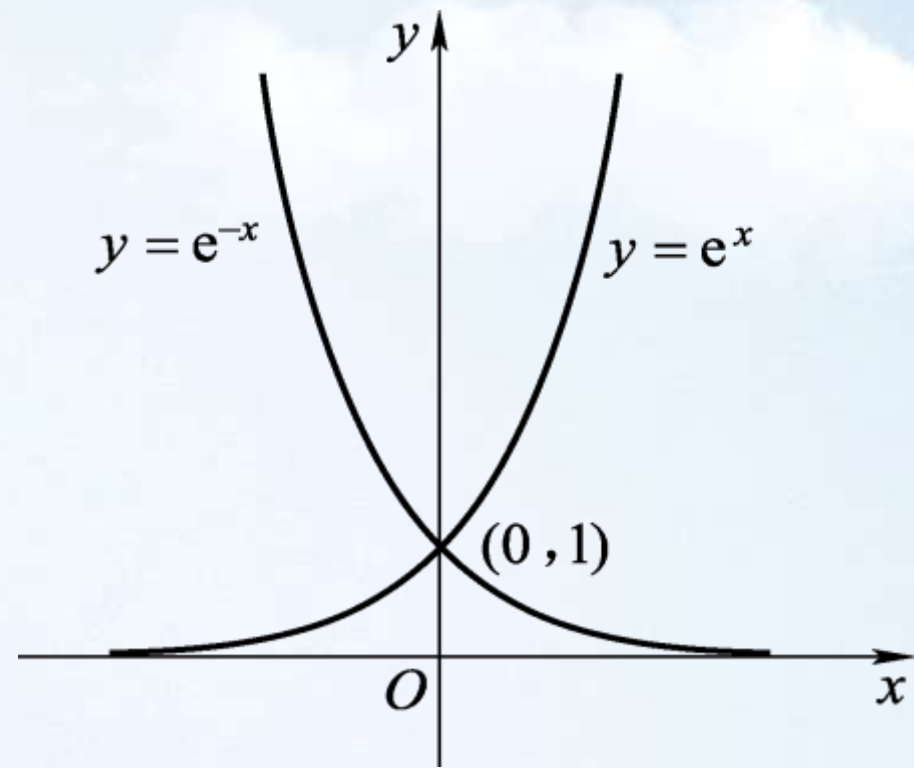
定理1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 。

例5 讨论函数 $y = e^x$ 及 $y = e^{-x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

解 如图所示为这两个函数的图形。

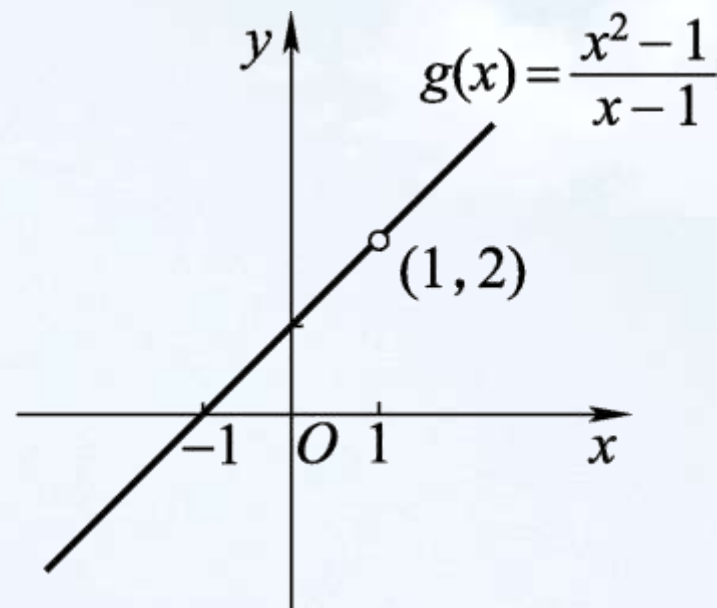
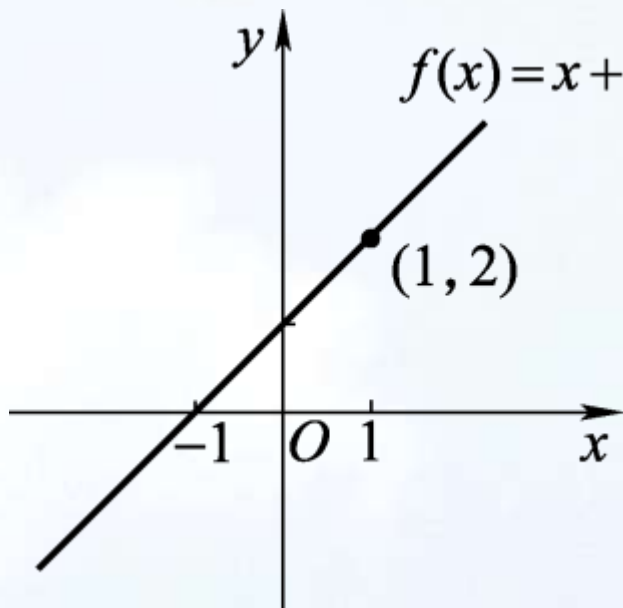
因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在。

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ 不存在。



2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

观察函数 $f(x) = x + 1$ 和 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的变化趋势。



从图像容易看出, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都无限接近于2。

定义4 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义（在 x_0 处可以无定义），如果存在一个常数 A ，当 x 无限趋于 x_0 ($x \neq x_0$) 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于 A ，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 .$$

单
侧
极
限

如果当 x 从 x_0 的左边趋于 x_0 （通常记作 $x \rightarrow x_0^-$ ）时， $f(x)$ 无限接近某常数 A ，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0-0) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A$$

如果当 x 从 x_0 的右边趋于 x_0 （通常记作 $x \rightarrow x_0^+$ ）时， $f(x)$ 无限接近某常数 A ，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0+0) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

例6 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$, 试判断 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在。

解 先分别求 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的左、右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ 。

定理2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在且都等于 A , 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

定理2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在且都等于 A , 即

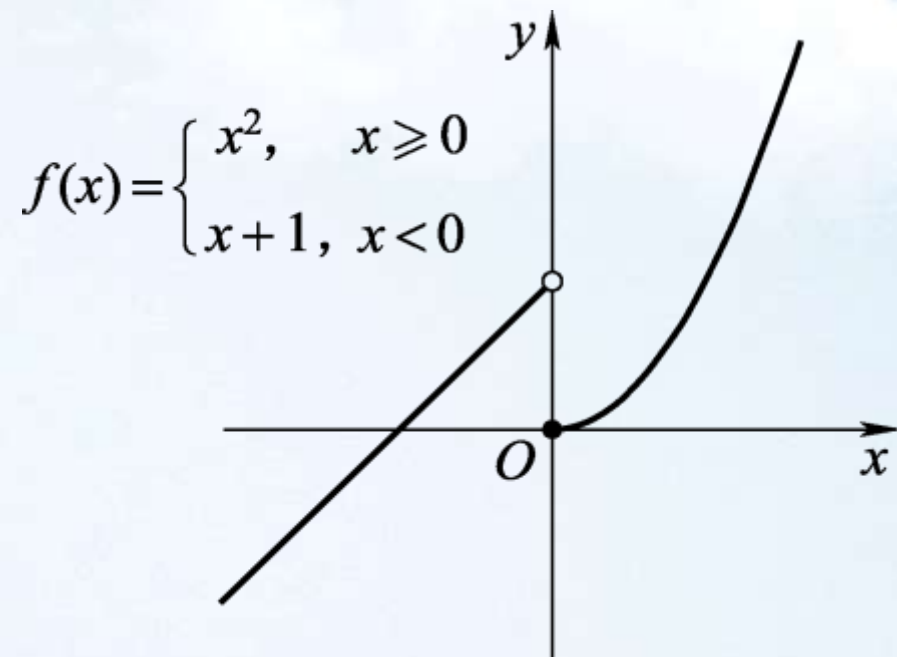
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

例7 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$ 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在?

解 如图所示

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。



注意: 求分段函数在分界点处的极限, 分界点左右关系式不同时, 一般需考虑左右极限!

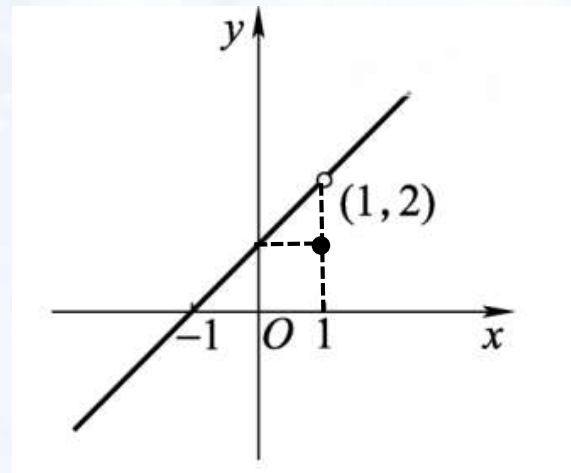
定理2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在且都等于 A , 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

例8 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在?

解

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



注意1: 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时是否存在极限与 $f(x_0)$ 是否存在没有任何关系。

2、求分段函数在分界点处的极限, 分界点左右关系式相同时, 一般不需考虑左右极限!

3. 函数极限的性质

定理1（唯一性） 如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限，则其极限唯一。

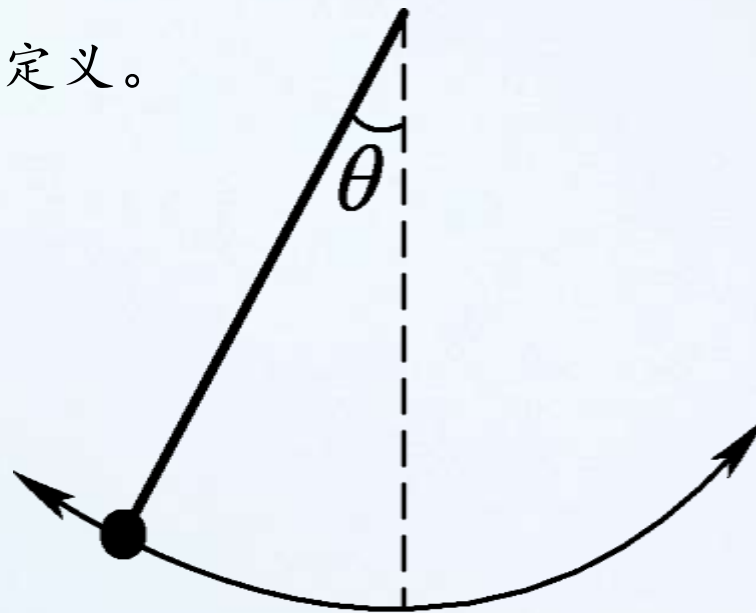
定理2（有界性） 如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时存在极限，则必存在 x_0 的某一邻域，使得 $f(x)$ 在该邻域内有界。

定理3（保号性） 若在 x_0 的左右近旁，恒有 $f(x) \geq 0$ （或 $f(x) \leq 0$ ）且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则 $A \geq 0$ （或 $A \leq 0$ ）。

2.1.3 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

引例 单摆离开铅直位置的偏度用角 θ 来度量，如图所示。如果让单摆自己摆动，由于机械摩擦力和空气阻力，摆动幅度就会不断地减小，角 θ 逐渐趋向于零。对于这种变量变化趋于零的情形，我们给出如下定义。



定义5 在自变量 x 的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的极限为0，即 $\lim f(x) = 0$ ，则称 $f(x)$ 为在该变化过程中的无穷小量，简称无穷小。

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ，所以，函数 $\sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小；

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，所以，函数 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

思考： 无穷小是否为很小的数？绝对值很小的常数是否为无穷小？

注意：(1) 无穷小是一个函数（变量），因此很小的量（常量）不是无穷小. 例如， 10^{-100} ，虽然很小，但它不能算是无穷小；

(2) 说一个函数是无穷小时，一定要指出自变量的变化过程，不能简单说函数是无穷小. 例如，当 $x \rightarrow 1$ 时，函数 $\frac{1}{x} \rightarrow 1$ ，此时 $\frac{1}{x}$ 不是无穷小，但由前面知，函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时是无穷小；

(3) 常数 0 是无穷小. 因它满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \rightarrow \infty)}} 0 = 0$.

例7 自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小：

(1) $y = 2^x$;

(2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ ，所以 2^x 是 $x \rightarrow -\infty$ 时的无穷小。

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$ ，所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 为无穷小。

还可以由定义得到无穷小的如下性质：

性质1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小。

性质2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小。

性质3 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小。

注意：无穷多个无穷小的和未必是无穷小。

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \rightarrow 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right)}_{n \text{ 个}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1+\cdots+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

性质3 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小。

例8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x$ 。

解 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，所以 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

又因 $|\cos x| \leq 1$ ，所以 $\cos x$ 是有界函数，再由性质3知， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x = 0$ 。

例9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 。

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ，所以 x 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小。

又因 $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ，所以 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数，再由性质3知， $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

(二) 极限与无穷小之间的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$$



当 $x \rightarrow x_0$ 时,
 $f(x) - A$
是无穷小.

若记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

定理2 (有界性) 如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时存在极限, 则必存在 x_0 的某一邻域, 使得 $f(x)$ 在该邻域内有界。

意义: (1) 将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

(2) 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$ 。

2. 无穷大量

定义6 在自变量 x 的某一变化过程中，若函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为在该变化过程中的**无穷大量**，简称**无穷大**。记 $\lim f(x) = \infty$ 。

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ，所以函数 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大量。

因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ ，所以函数 $\tan x$ 是 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时的无穷大量。

如果函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的正无穷大，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$$

如果函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的负无穷大，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 。

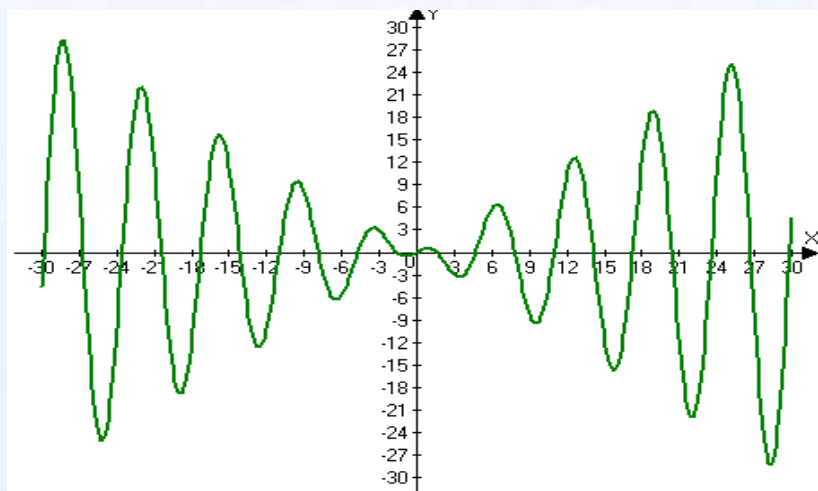
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

注意：(1) 无穷大是一个函数（变量），因此很大的量（常量）不是无穷大。例如： 10^{100} 虽然很大，但它不能算是无穷大。

(2) 说一个函数是无穷大时，一定要指出自变量的变化过程，不能简单的说函数是无穷大。例如函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是无穷大，在 $x \rightarrow \infty$ 时是无穷小。

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$ ，按函数极限定义来说，极限是不存在的。但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说“函数的极限是无穷大”。

(4) 注意无穷大与无界量的区别：无穷大是无界量，无界量未必是无穷大。



例10 自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷大：

$$1. y = \frac{1}{x-1}, \quad 2. y = 2x-1, \quad 3. y = \ln x, \quad 4. y = 2^x.$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ ，所以当 $x \rightarrow 1$ 时， $\frac{1}{x-1}$ 为无穷大；

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x-1} = 0$ ，所以当 $x \rightarrow \infty$ 时， $2x-1$ 为无穷大。

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ，所以当 $x \rightarrow 0^+$ ，以及 $x \rightarrow +\infty$ 时， $\ln x$ 均为无穷大。

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ ，所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时， 2^x 为无穷大。

3. 无穷大与无穷小的关系

定理3 在自变量的同一变化过程中，无穷大、无穷小互为倒数关系，即如果 $\lim f(x) = 0$ （或 ∞ ），则有 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$ （或 0 ）。

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ 。

注意：（1）极限 $\lim f(x)$ 没有写出自变量 x 的变化过程，意味着此结论对自变量 x 的任意变化过程都成立，但在做题时，一定要写出自变量 x 的变化过程。

（2）无穷小与无穷大反映了自变量在某一变化过程中函数的两种特殊变化趋势——绝对值越来越小和绝对值越来越大，是两个特殊的极限。

例11 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 4}$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x^2 - 3} = 0$

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}$ 是无穷小。

根据无穷小与无穷大的关系可知当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 4}$ 是无穷大。

即 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 4} = \infty$.

关于无穷大的讨论, 都可转化为关于无穷小的讨论.

一、极限的运算法则

定理 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B ;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B ;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) .$$

推论 1 如果 $\lim f(x) = A$, 则有 $\lim Cf(x) = C \lim f(x) = CA$ (C 为常数).

推论 2 如果 $\lim f(x) = A$, 则有 $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$ (n 为正整数).

说 明:

(1) 定理说明: 极限运算 $\lim$ 与四则运算可以交换次序.

(2) 以上定理(1), (2)可以推广到有限个函数的情形.

例如 $\lim f(x)$ 、 $\lim g(x)$ 、 $\lim h(x)$ 都存在, 则

$$\lim[f(x)+g(x)+h(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)+\lim h(x)$$

(3) 以上定理都要求 $f(x)$, $g(x)$ 的极限存在, 商的法则还要求分母的极限不为零.

二、极限的求解方法

(一) 直接代入法

直接代入法是指在求多项式函数 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ($a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常系数) 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限时, 只要把 x_0 代替函数中的 x 就行, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n,$$

若 $f(x)$, $g(x)$ 均为多项式函数, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

例1 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3)$.

解

由于此时的分母恒为 $1 \neq 0$ ，于是，由直接代入法得

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 2} x - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$$

例2 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6}$.

解 由于将 $x=1$ 代入分母得 $1^2 + 6 \neq 0$ ，于是，由直接代入法得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 6)} = \frac{1^2 - 2 + 5}{1^2 + 6} = \frac{4}{7}$$

(二) 倒数法

倒数法适用于求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ，其中 $g(x_0) = 0$ ，但 $f(x_0) \neq 0$ ，记为 “ $\frac{A}{0}$ ” 型。具体步骤为：由

直接代入法，先求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ ，再由无穷大与无穷小的关系得 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ 。

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ 。

解 将 $x=1$ 代入分母得 $1-1=0$ ，但代入分子得 $1^2 + 2 = 3 \neq 0$ 。

于是，其倒数的极限为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{1-1}{1^2+2} = 0$$

所以，由无穷大与无穷小的关系知，原式 $= \infty$ 。

(三) 分解因式法，约去零因子法 $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

分解因式法适用于求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ，其中 $g(x_0) = 0$ 且 $f(x_0) = 0$ ，记为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型．具体步骤为：将

分子或分母分解因式，约去共同的零因子，再用直接代入法求解．

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

解 将 $x=2$ 代入分子、分母都是0，于是，将分子、分母先分解因式，得

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

练习 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ ．

(四) 分子或分母有理化, 约去零因子法 $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

它适用于 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $g(x_0)=0$ 且 $f(x_0)=0$, 且分子或分母中含有根号, 记为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型. 方法:

将分子或分母有根号的先有理化, 约去共同的零因子, 再用直接代入法。

例5 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

解 将 $x=1$ 代入分子、分母都是0, 且分母中含有根号, 因此先将分母有理化, 再用直接代入法, 即

原式

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+2}{1} = \frac{\sqrt{1+3}+2}{1} = 4 \end{aligned}$$

练习 计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

(五) 公式法 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型

公式法适用于求解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$, 此时分子、分母都趋于 ∞ , 记为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型. 具

体步骤为: 先将分子、分母同除 x 的最高次方, 将分子、分母都转化成无穷小求解。

例5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x + 2}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

用分子、分母中的最高次幂除之,再求极限.

例6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - x + 2}$

解

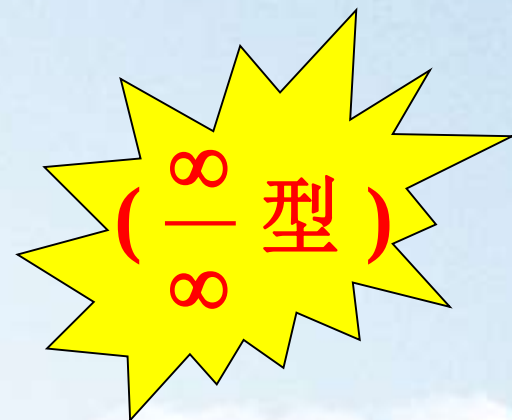
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = 0$$

例7 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{3x^2 - x + 2}$

解

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{3x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n < m \text{ 时,} \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \text{ 时,} \\ \infty, & \text{当 } n > m \text{ 时.} \end{cases}$$



练习 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x}{10x^5 - 4x + 7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-5}}.$$

(六) $\infty - \infty$ 型

它适用于 $\lim[f(x) - g(x)]$ ，其中 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = \infty$ ，记为“ $\infty - \infty$ ”型。方法：先通分或先将分子有理化，就可以化成前面几种形式。

例7 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ 。

解 此题属于 $\infty - \infty$ 型，因此，先通分再整理化简，有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-2}{1+x+x^2} = \frac{-1-2}{1+1+1^2} = -1 \end{aligned}$$

练习 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

(一) 直接代入法 直接代入法是指在求多项式函数 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ($a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常系数) 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限时, 只要把 x_0 代替函数中的 x 就行, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n$, 若 $f(x), g(x)$ 均为多项式函数, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

(二) 倒数法 倒数法适用于求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $g(x_0) = 0$, 但 $f(x_0) \neq 0$, 记为 “ $\frac{A}{0}$ ” 型. 具体步骤为: 由直

接代入法, 先求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, 再由无穷大与无穷小的关系得 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(三) 约去零因子法 $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型 分解因式法和根式有理化适用于求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $g(x_0) = 0$ 且 $f(x_0) = 0$, 记为 “ $\frac{0}{0}$ ”

型. 具体步骤为: 将分子或分母分解因式或根式有理化, 约去共同的零因子, 再用直接代入法求解.

(四) 公式法 公式法适用于求解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$, 此时分子、分母都趋于 ∞ , 记为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型. 具体步骤为:

先将分子、分母同除 x 的最高次方, 将分子、分母都转化成无穷小求解.



2.3 两个重要极限及无穷小的比较

01



两个重要极限

02



无穷小的比较

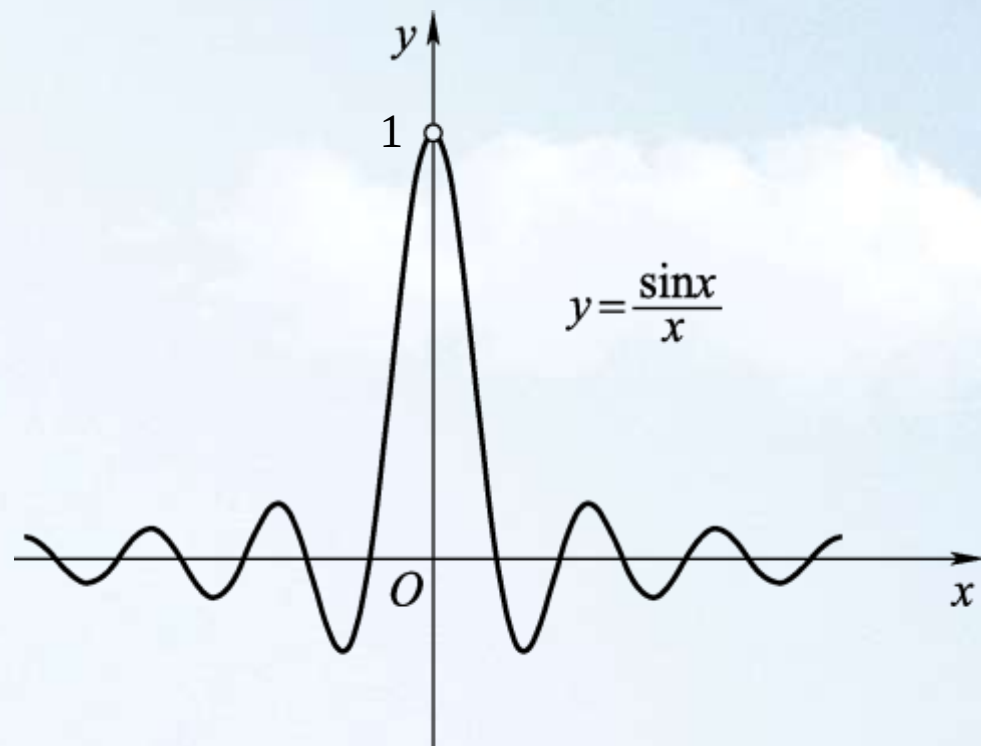
2.3.1 两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的图像如图所示，从图像可以观察出，当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的值无限趋近于1。

此重要极限属于“ $\frac{0}{0}$ ”型，含有正弦函数 $\sin x$ 。

注意： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$



例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ 。

解1 令 $u = 3x$ ，则 $x = \frac{u}{3}$ 。当 $x \rightarrow 0$ 时， $u \rightarrow 0$ 。于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{\frac{u}{3}} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3$$

重要极限可形象地表示为 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ ，其中 $f(x)$ 是指同一个变量或表达式。

解2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$$

注意： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin kx} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$ 。

例2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \frac{3}{5} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

注意: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

例3 求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} ; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} .$$

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 * \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} .$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{\pi - x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1 .$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

列表考察当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，如表所示。

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	$\cdots \rightarrow +\infty$
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	$\cdots \rightarrow e$
x	-10	-100	-1 000	-10 000	-100 000	-1 000 000	$\cdots \rightarrow -\infty$
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.731 99	2.719 64	2.718 42	2.718 30	2.718 28	$\cdots \rightarrow e$

从表2-1中可以看出，当 $x \rightarrow -\infty$ 及 $x \rightarrow +\infty$ 时， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于 $e = 2.718\ 28\cdots$ ，即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

如果令 $\frac{1}{x} = t$ ，当 $x \rightarrow \infty$ 时， $t \rightarrow 0$ ，公式还可以写成 $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$ 。

此重要极限属于“ 1^∞ ”型，常形象地表示为

$$\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \text{ 或 } \lim_{f(x) \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

例3 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x.$$

解

$$(1) \text{ 令 } \frac{x}{3} = u, \text{ 则 } x = 3u. \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 = e^3$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^{-x \cdot (-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^{-x} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^{-x} \right\}^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{-1} = e.$$

练习 计算 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x+3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

例4 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{x}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{\frac{1}{-x} \times (-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{4x} \cdot 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}} \right]^4 = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{4x}} \right]^4 = e^4.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

练习 计算 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{-\sec x}.$

2.3.2 无穷小的比较

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定理4 设 α, β 是自变量的同一变化过程中 ($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$) 的无穷小量, 且 $\alpha \neq 0$ 。

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶的无穷小;

若 $c = 1$, 即 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 。

练习 (1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ 相比, 哪一个是比较高阶的无穷小?

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等阶?

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$ 。

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

注: 等价无穷小代换只能代换乘除中的因子, 不能代换和差中的项。

例5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 - 4x}$ 。

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 。

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2}$$

练习 计算 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - 1}$.



2.4 函数的连续性

01



连续函数的概念

02



函数的间断点

03



初等函数
的连续性

04



闭区间上连续
函数的性质

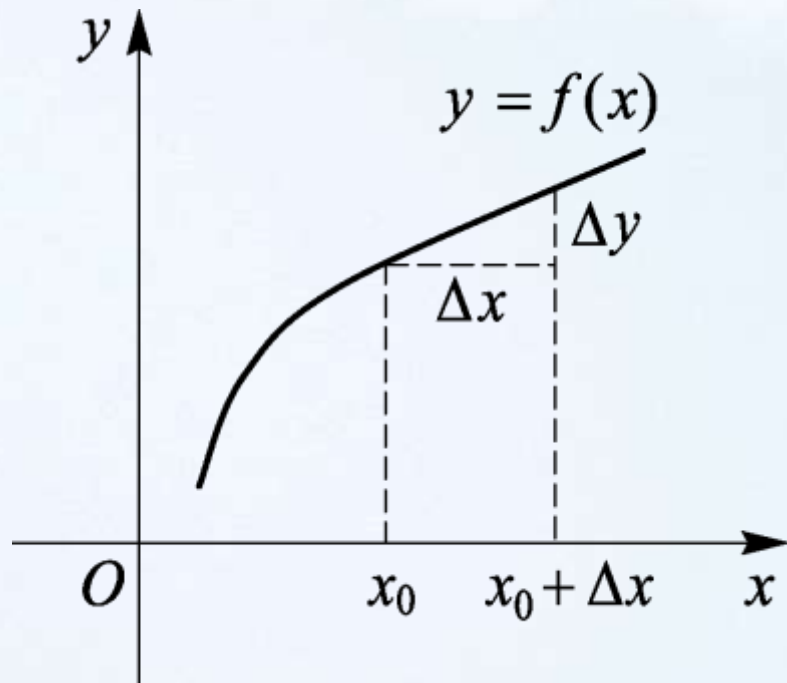
2.4.1 连续函数的概念

1. 函数的增量

自变量从初值 x_0 变为终值 x 时，终值与初值的差 $x - x_0$ 称为自变量 x 的增量 Δx （通常也称为改变量），记作 Δx 。增量 Δx 可正可负。

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在该邻域内由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$ ，称 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数的增量（或改变量），记作 Δy 或 $\Delta f(x)$ ，则有 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

函数增量的几何意义如图所示。



渐变

突变

2. 函数连续的定义

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处及其邻域内有意义，当自变量 x 在 x_0 处的改变量 Δx 趋于零时，相应地函数的改变量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定义2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处及其邻域内有意义，如果当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的极限存在且等于函数在点 x_0 处的函数值，即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

注：1、函数值 $f(x_0)$ 存在；2、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；3、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 三个条件缺一不可。

2、若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $y = f(x)$ 在 x_0 点极限一定存在，反之，不一定成立；

3、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ ，即极限和函数表达式可交换运算顺序。

例1 讨论函数在给定点处的连续性。

$$(1) f(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ 点 } x=2, x=5 \quad (2) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0, \\ \cos x, & x > 0, \end{cases} \quad x=0$$

解 (1) 因为函数在 $x=2$ 点定义不存在, 所以在此点不连续; 在 $x=5$ 点处,

$$f(5) = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3} \quad \text{且} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) \quad \text{所以函数在 } x=5 \text{ 点处连续。}$$

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在,

且 $f(0) = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ 。

由定义可知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

定义3 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是左连续。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是右连续。

记作: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, $f(x_0^+) = f(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, $f(x_0^-) = f(x_0)$

定理1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 。

例2 试确定 a 值, 使得函数 $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 3 & x \leq 2 \\ 2x + a & x > 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 点连续。

解 若函数在 $x = 2$ 点连续, 由连续充分必要条件知:

$$f(2) = 5 \times 2^2 - 3 = 17; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + a) = 4 + a.$$

所以 $4 + a = 17$ $a = 13$.

2.4.3 初等函数的连续性

定理1 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续, 那么它们的和、差、积、商 (分母不等于0) 也都在点 x_0 处连续。

定理2 若函数 $y = f(u)$ 在 u_0 处连续, 函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right]$$

注: 在满足定理的条件下, 极限与函数符号可以互换。

例3 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 。

解 因为 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x^2 - 2x + 5$ 复合而成的，所以

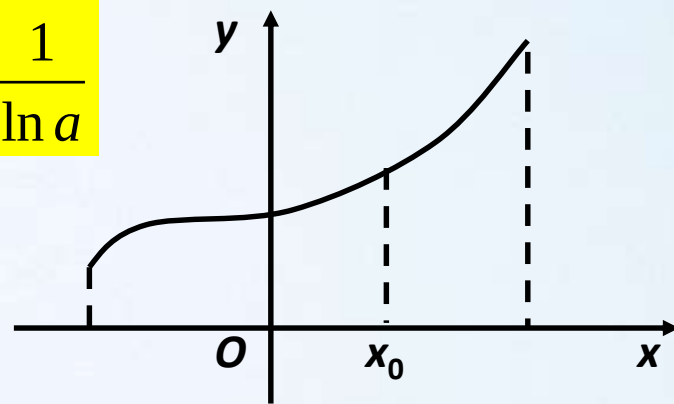
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5)} = 2$$

例4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ 。

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

定理3 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。



注：函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的几何意义：函数的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不断开。

例5 求下列函数的极限 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\tan x - 3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

解: (1) 点 $\frac{\pi}{4}$ 在函数 $f(x)$ 的一个定义区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, 因为初等函数在它的定义区间内连续,

$$\text{所以有 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\tan x - 3} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4} - 3} = -\frac{1}{4}$$

(2) 因为 $x=3$ 不在此函数的定义区间内, 在此点不连续, 故:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

注: 此种解题即用分子有理化, 消掉使分母为零的“因子”, 此时函数在这点连续, 其函数值就是该点的极限.

练习 求下列函数的极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln(4 - 3x)}{\arctan x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{3x^2 + \cos x^2 + 2}$ 。

定义4 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内各点处均连续, 则称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续。

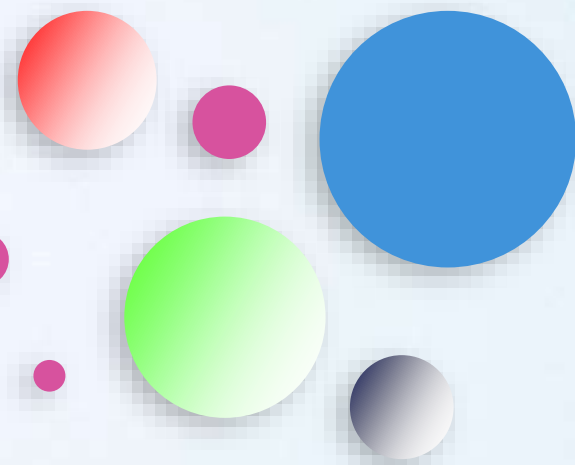
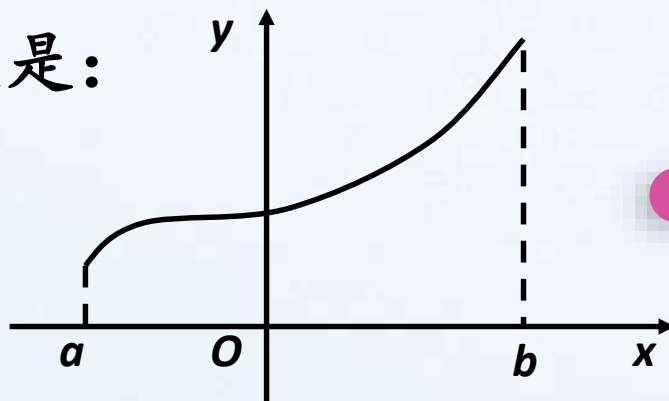
若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 在 $x=a$ 处右连续, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上连续。

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 在 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续。

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 在 $x=a$ 处右连续, 在 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续。

函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 连续的几何意义是:

函数的图形在 (a, b) 内连绵不断。



例6 求函数 $y = \sqrt{x+4} - \frac{1}{x^2-1}$ 的连续区间。

解 因为函数 $y = \sqrt{x+4} - \frac{1}{x^2-1}$ 的定义域为 $[-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ，所以它的连续区间为 $[-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

例7 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \leq 1 \\ 2x^2-3 & x > 1 \end{cases}$ 在区间 $[1, 3], [-2, 1]$ 上的连续性。

解 函数在 $[-2, 1), (1, 3]$ 内连续，只看它在分点 $x=1$ 的连续性，

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2-3) = -1; \quad f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$$

即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$ ，函数在 $x=1$ 点左连续，所以函数在区间 $[-2, 1]$ 上连续，在 $[1, 3]$ 上不连续。

2.4.2 函数的间断点

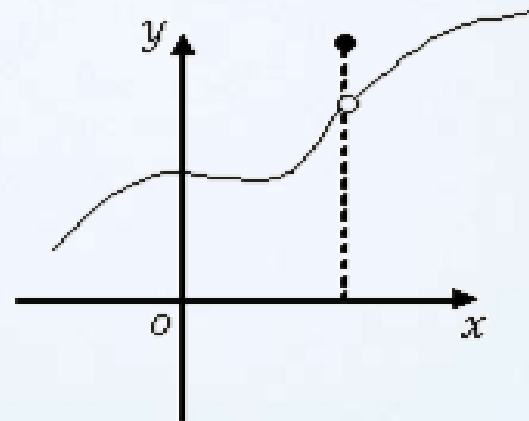
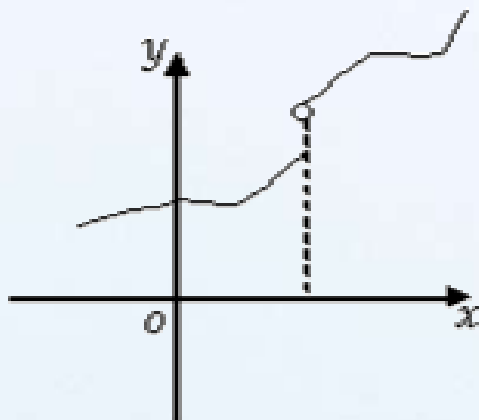
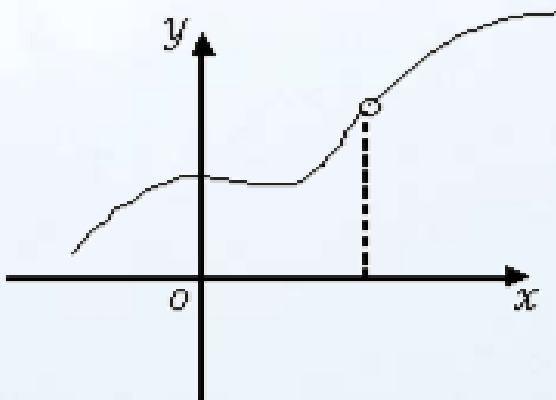
定理5 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $y = f(x)$ 有下列三种情形之一：

(1) 在 $x = x_0$ 处没定义；

(2) 在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 在 $x = x_0$ 处有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续或间断，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。



三、间断点的分类

第一类间断点

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在

可去间断点

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

$x=0$ 是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的
可去间断点

跳跃间断点

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$x=1$ 是 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ 的
跳跃间断点

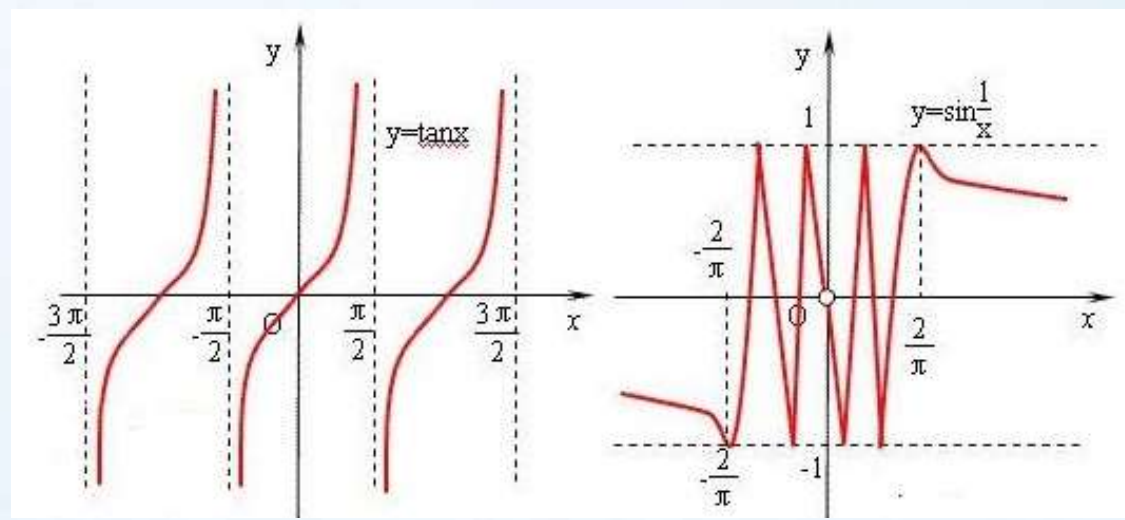
间断点

第二类间断点

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在

无穷间断点

振荡间断点



例8 找出下列函数的间断点并分类：

$$(1) \quad f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 1 \\ x-3 & x \geq 1 \end{cases}$$

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$ ，故 $f(x)$ 在 $x=2$ 和 $x=3$ 处间断。

$$\because \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \infty; \quad \therefore x=2 \text{ 是函数 } f(x) \text{ 第二类间断点中的无穷间断点。}$$

$$\because \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1;$$

$\therefore x=3$ 是函数 $f(x)$ 第一类间断点中的可去间断点。

$$(2) \text{ 函数 } f(x) \text{ 定义域为 } \mathbb{R}, \because \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3;$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \therefore x=1 \text{ 是函数 } f(x) \text{ 第一类间断点中的跳跃间断点。}$$

2.4.4 闭区间上连续函数的性质

性质1（界值定理） 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在该区间上是有界函数。

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\exists$ 数 $M > 0$, s.t. $|f(x)| \leq M$.

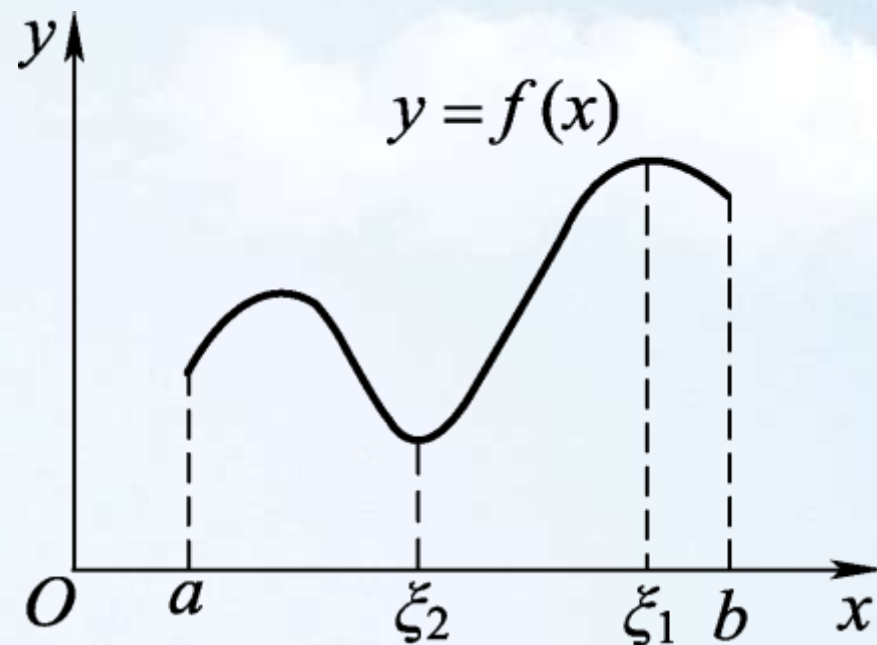
注：半开半闭区间或开区间上的连续函数不一定有界。

例如： $y = \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续且有界； $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续但无界。

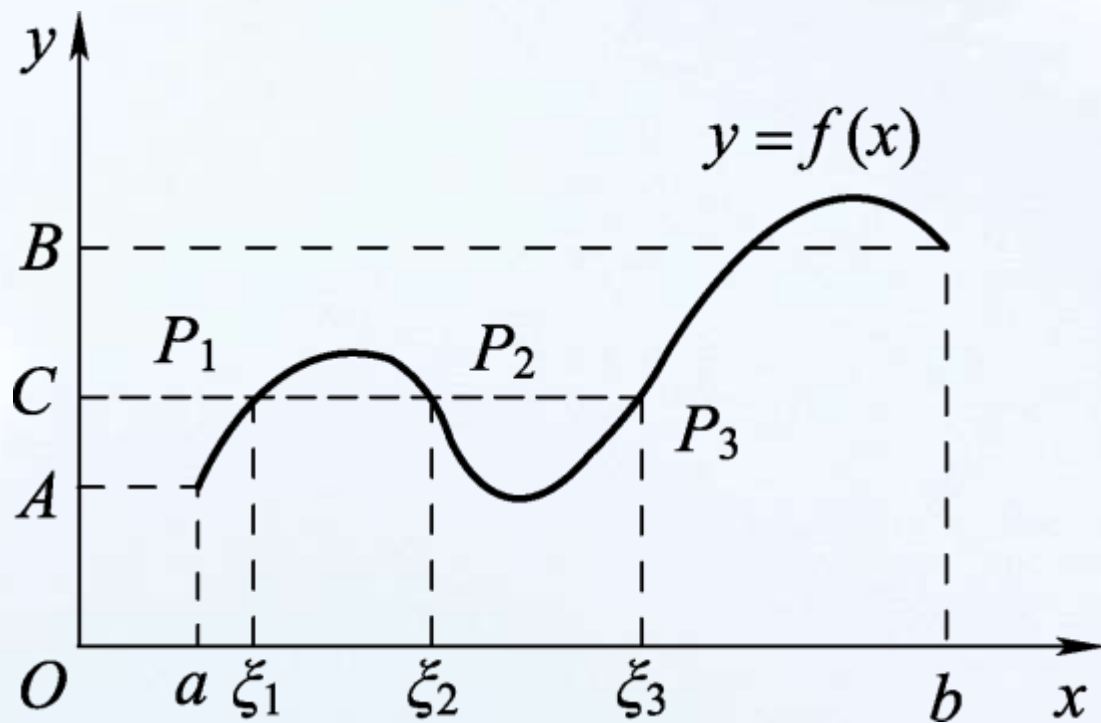
性质2（最值定理） 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在该区间上必有最大值和最小值。

如图所示，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则在 (a, b) 上至少有一点 ξ_1 ，使得 $f(x)$ 在点 ξ_1 处取最大值 M ；同样，至少有一点 ξ_2 ，使得 $f(x)$ 在点 ξ_2 处取最小值 m 。

注： 半开半闭区间或开区间上的连续函数不一定有最值。

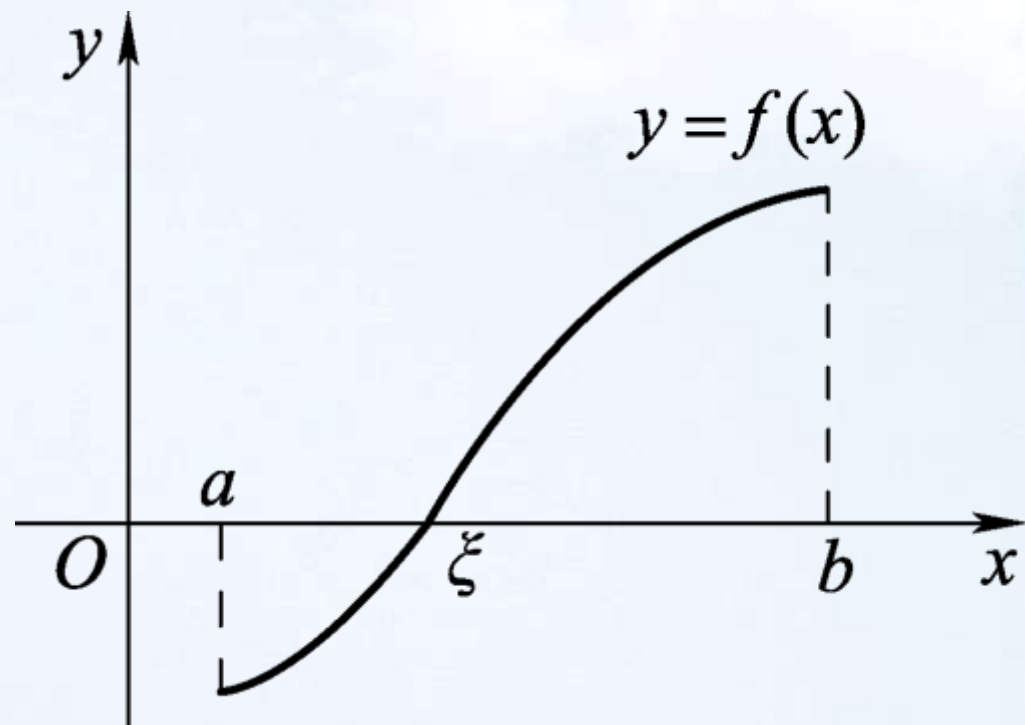


性质3 (介值定理) 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$, 如图所示。



推论（零点定理） 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f(\xi) = 0$ 。

从几何意义上讲，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的图形是一条连续曲线，其两个端点分别位于 x 轴两侧，那么这条曲线与 x 轴至少有一个交点。如图所示。



例9 证明方程 $x^3 + 2x = 6$ 至少有一个根介于1和3之间。

解

设 $f(x) = x^3 + 2x - 6$ ，则 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上连续，且 $f(1) = -3 < 0$ ，
 $f(3) = 27 > 0$ 则由零点定理可知在 $(1, 3)$ 内至少有一点 x_0 ，使 $f(x_0) = 0$ ，
即方程 $x^3 + 2x = 6$ 在 $(1, 3)$ 内至少有一根。

练习 1. 证明方程 $x^3 = 3x^2 - 1$ 至少有一小于1的正根。

2. 证明: 方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0$, $b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$ 。