求导法则 单元教学设计

<table>
<tr><td colspan="2">单元标题：</td><td colspan="2">求导法则</td><td>单元教学学时</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td>在整体设计中的位置</td><td>第 1 次</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握导数的四则运算并运用
②能够掌握复合函数求导数法则并运用</td><td>导数运算法则</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　导数的四则运算
任务 2　复合函数求导数法则</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

单元教学进度

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1 （告知）	本单元学习目标： 导数的四则运算 复合函数求导法则	陈述	板书	识记
2 （引入任务1）	导数的四则运算 例 $y=2x^3+x^2+1$, 求 y' 例 $y=xe^x+2x$，求 y' 例 $y=\log_a x$，求 $\frac{dy}{dx}$ 例 $y=e^x\sin x$，求 $\frac{dy}{dx}$ 例 $y=\sqrt{x}\cos 4x+4\ln x+\sin\frac{\pi}{7}$， 求 y'	教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨
3 （任务2）	复合函数求导数 设 $y=f[\varphi(x)]$，则分解成 $y=f(u),u=\varphi(x)$。所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 例 $y=\sin\sqrt{x}$，求 y' 例 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，求 y' 例 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$，求 y' 例 $y=\sin\ln\sqrt{2x+1}$，求 y'	教师启发讲解	板书	师生研讨
作业	完成求导课后习题，熟练背诵求导公式			
课后反思	学生基础混杂，有的甚至没学过高等数学，因此第一次课进行知识铺垫非常有必要。			

不定积分的概念与性质　单元教学设计

单元名称：　不定积分的概念与性质		单元教学学时	2
		在整体设计中的位置	第 2 次
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	1. 能利用原函数的概念推导出基本初等函数的积分公式； 2. 会用直接积分法求不定积分	1. 理解原函数与不定积分的概念； 2. 知道不定积分的性质； 3. 熟练掌握不定积分的基本公式和直接积分法.	培养学生逻辑推导能力
能力训练任务	任务 1　原函数概念 任务 2　不定积分概念 任务 3　基本初等函数积分公式 任务 4　不定积分性质 任务 5　直接积分法		
本次课使用的外语单词	不定积分 indefinite integral；原函数 basic elementary function		
案例和教学材料	1. 教材：《高等数学及其应用（第 3 版）》，吕同富，高等教育出版社，2018. 4. 2. 案例：变速运动物体的运动规律		

单元教学进度

步骤	教学内容及能力/知识目标	教师活动	学生活动	时间分配
1（回顾引入任务）	回顾几个基本初等函数的求导公式，引出本单元学习目标： 1. 理解原函数与不定积分的概念； 2. 理解不定积分的性质； 3. 熟练掌握不定积分的基本公式和直接积分法.	提出问题：以前学过哪些互逆的运算？	思考	10 分钟
2（任务 1）	原函数： 如果 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)\mathrm{dx}$，	提问：如果一个函数有原函数，那么原函数是否唯一？	分组研讨	10 分钟

	那么 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。 原函数的存在特性			
3（任务2）	不定积分： $f(x)$ 的全部原函数 $F(x)$+C 叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx = F(x)+C$. 例 $\int 2xdx$ 例 $\int \cos xdx$	教师讲授概念	学生认真听课并回答问题	10 分钟
4（任务3）	基本初等函数积分公式 不定积分的几何意义	根据不定积分和原函数的关系启发学生归纳总结 简单介绍几何意义	提问回答	15 分钟
5（任务4）	不定积分的性质 （1）$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （2） $\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ （3）$(\int f(x)\,dx)' = f(x)$ （4）$\int F'(x)\,dx = F(x)+C$	教师启发讲解	师生研讨	15 分钟
6（任务5）	直接积分法 例 $\int (x - x\sqrt{x} + \frac{2}{x})\,\mathrm{d}x.$ 例 $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ 例 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$. 例 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}dx$	教师讲解例题并布置课堂练习题	学生认真听讲	23 分钟
7（案例1）	案例 1　已知物体以速度 $v = 2t^2+1$ 做直线运动，当 $t = 1s$ 时，物体经过的路程为 3m，求物体的运动规律.	提问	学生思考解答	5 分钟

总结	原函数的概念，原函数与导函数的关系 不定积分的概念 不定积分的性质 不定积分的简单计算	2 分钟
作业	牢记基本积分公式并完成课后习题	
课后体会	对于函数的积分问题，学生对这个概念的理解不是特别好，现在关键是弄清楚函数的积分到底指什么，让学生搞清楚了这一点，求解函数的积分问题也就好解决了。	

第一类换元积分法　单元教学设计

单元名称：　第一类换元积分法		**单元教学学时**	2
		在整体设计中的位置	**第 3 次**
教学目标	**能力目标**	**知识目标**	**素质目标**
	1.能利用第一类换元积分法求不定积分	1.理解第一类换元积分法的思想	培养学生逻辑推导能力
能力训练任务	任务 1　凑微分法求不定积分		
本次课使用的外语单词	不定积分 indefinite integral；		
案例和教学材料	1.教材：《高等数学及其应用（第 3 版）》，吕同富，高等教育出版社，2018.4. 2.案例：变速运动物体的运动规律		

单元教学进度

步骤	教学内容及能力/知识目标	教师活动	学生活动	时间分配

1（引入任务）	我们能否从基本积分公式 $\int \cos x dx = \sin x + C$ 得出$\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$呢？由于不定积分与求导是逆运算，因此$(\sin 2x + C)' = 2\cos 2x \neq \cos 2x$. 显然，这推测是错误的. 比较$\int \cos \underbrace{x dx}_{\text{变量相同}}$与$\int \cos \underbrace{2x dx}_{\text{变量不同}}$，我们发现变量不统一就不能用基本积分公式，根据复合函数的微分法我们可作变换得到 $$\int \cos 2x dx = \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2} d(2x)$$ $$= \frac{1}{2}\int cox 2x d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$		思考	10 分钟
2（任务 1）	**定理** 设$F(u)$是$f(u)$的一个原函数，即$\int f(u)du = F(u) + C$，$u = \varphi(x)$可导，则 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \overset{\text{凑微分}}{=\!=} \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \overset{\text{令}\varphi(x)=u}{=\!=}$$ $$\int f(u)du = F(u) + c$$ $$\overset{\text{回代}u=\varphi(x)}{=\!=} F[\varphi(x)] + C.$$ 这种先“凑”微分，再作变量置换的方法叫**第一类换元积分法**，又称**凑微分法**. **例 1** 求$\int \frac{1}{3x+2}dx$. **例 2** 求 $\int e^{2x+5}dx$. **例 3** 求$\int \sin(3x+2)dx$. **例 4** 求$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx$. **例 5** 求$\int (5x-2)^8 dx$.	讲解凑微分的技巧	分组研讨，训练巩固	30 分钟

	例 6 求 $\int \frac{1}{x^2-9}dx$.			
3（任务 2）	学生总结凑微分方法。 （1）把被积函数的一部分，利用微分，转移到 d 的后面，形成某函数的微分 （2）d 后面的微分正好与被积函数剩下的部分有相同的关系，然后把它们看成一个整体，利用基本初等函数公式求得。 （3）前面的转移到 d 后面的函数被看做一个整体，其实也是换元法，所以凑微分又叫第一换元法。	教师启发引导	学生总结	10 分钟
4（任务 3）	**例 7** 求 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$. **例 8** 求 （1）$\int \cot x dx$ ； （2）$\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$； （3）$\int \sin^3 x dx$ ； （4）$\int \sec x dx$.	根据微分、积分的关系，熟练思考凑微分的类型	训练	30 分钟
总结	凑微分运用时的难点在于原题并未指明把哪一部分凑成 $d\varphi(x)$,这需要解题经验，多做练习，做熟悉。			10 分钟
作业	第一类换元积分法的课后训练			
课后体会	凑微分运用时的难点在于原题并未指明把哪一部分凑成 $d\varphi(x)$,这需要解题经验，多做练习，做熟悉。			

第二类换元积分 单元教学设计

单元名称： 第二类换元积分法		单元教学学时	2
		在整体设计中的位置	第 4 次
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	1. 能利用第二类换元积分法求不定积分	1. 理解第二类换元积分法的思想	培养学生逻辑推导能力
能力训练任务	任务 1 第二类换元法求不定积分		
本次课使用的外语单词	不定积分 indefinite integral；		
案例和教学材料	1. 教材：《高等数学及其应用（第 3 版）》，吕同富，高等教育出版社，2018. 4. 2. 案例：变速运动物体的运动规律		

步骤	教学过程	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1（告知）	本单元学习目标： 换元法	陈述	板书	识记	10 分钟
2（任务 1）	不定积分的换元法种类大题有两类种，一种是消掉根号的模式，另一种是三角函数换元。 （1）消掉根号 例 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ 为了消掉根号，令 $\sqrt{x}=t$，这样 $x=t^2$， $dx=2tdt$，于是原来的不定积分变成了：	学生阅读教师启发讲解	板书	师 生研讨	30 钟

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t^2 dt}{1+t} = 2\int \left(t-1+\frac{1}{1+t} \right) dt$$
$$= t^2 - 2t + 2\ln|1+t| + C$$

练习：(1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$ (2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3-x}}$

(2) 三角函数换元

例 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

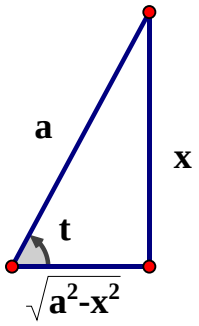
本例要是直接代换根号，做不出来，必须另寻其他途径。

令 $x = a\sin t$， $dx = a\cos t dt$，代入原来的不定积分得：

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos t a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 dt$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^3}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

下面利用直角三角形把 t 转换成 x。首先根据代换公式 $x = a\sin t$，得 $\sin t = \frac{x}{a}$，做角度是 t 的直角三角形



所以 $t = \arcsin\frac{x}{a}, \cos t = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

所以，最后所求的不定积分是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

三角代换常用还有 cosx,tanx 等

练习：(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} (a > 0)$

(2) $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

3 （引入任务2）	定积分的换元法与不定积分的换元法基本一致，不一样的地方就是多了上下限，最后需要利用牛顿莱布尼茨公式求解最后结果。学生阅读 174 页内容，理解两者的不同，以及换元以后如何代入积分上下限。 （1）第一种情况是上下限不变，等换元法计算结束，再代入原来的上下限 （2）第二种情况是换元时，也同时把上下限变换。 例 求 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 第一种解法：先利用不定积分的知识求解积分结果 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \overset{令\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = \cdots = 2(t-\ln\lvert 1+t\rvert)+C$ $=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$，于是 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))\Big\vert_0^4 = 4-2\ln 3$ 第二种解法：上下限跟着变换同时变换 令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，当 $x=0$ 时 t=0，当 x=4 时 t=2，于是原式= $\int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t-\ln\lvert 1+t\rvert)\Big\vert_0^2$ $=2(2-\ln 3)$ 从以上方法可看出，第二种方法较好，所以尽量使用第二种方法。 练习：求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$，提示：令 $\sqrt{e^x-1}=t$。 上面是比较明显的换元法，有时也可用凑微分法计算定积分。 下面是一个两个重要的结论： （1）设 f(x)在对称区间[-a,a]上连续，则 当 f(x)时偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 当 f(x)时奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ （2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 案例 学生解答案例 1　案例 2　案例 3	学生阅读教师启发讲解	板书	师 生研讨	20 钟

4 案例 训练	案例操练 案例 1 $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$ 案例 2 $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ 案例 3 $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	学生 思考 教师 提示			30 分 钟
5 :教学 小结	基本初等函数基本图形和性质非常重要，对后续本门课程的学习至关重要，要让学生熟练掌握；复合函数的分解是复合函数求导法则的基础，这是难点也是重点，通过大量的练习让学生掌握。				
6 布置 作业	1. 课后练习题； 2. 小结第二换元积分法的代数换元和三角换元类型题。				

分部积分法 单元教学设计

单元标题：	分部积分法	单元教学学时	2
		在整体设计中的位置	第 5 次

	能力目标	知识目标	素质目标
教学目标	①能够掌握分部积分法	分部积分法	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练任务及案例	任务 1　分部积分法		
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社		

单元教学进度

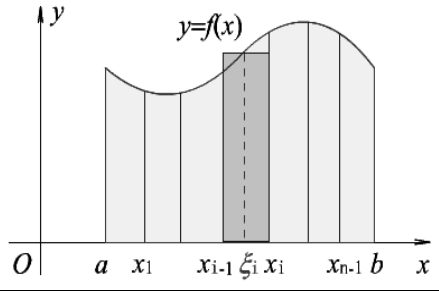
步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1 （告知）	本单元学习目标： 分部积分法和分部积分公式	陈述	板书	识记
2 （引入任务1）	分部积分法 学生阅读 106-107 页，理解分部积分法。 公式：$\int udv = uv - \int vdu$ 分布积分前面一部分其实是凑微分，后面才利用上面的分部积分公式。 例 $\int x\cos xdx$ 解： $\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx$ $= x\sin x + \cos x + C$ 例 $\int x\ln xdx$ $\int x\ln xdx = \int \ln xd\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}d\ln x$ $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$ $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ 练习：(1) $\int e^x\sin xdx$ (2) $\int \arctan\sqrt{x}dx$ (3) $\int \ln xdx$	教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨
作业	完成分部积分法课后习题，明确分部积分法的使用类型			
课后反思	在学生掌握了大量积分方法时，却会面临不知道该用哪种方法解题，所以要注意强调各种方法针对的题型			

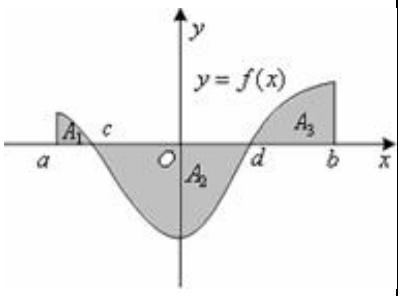
定积分的概念与性质　单元教学设计

单元名称：定积分的概念与性质		**单元教学学时**	2
		在整体设计中的位置	**第 6 次**
	1.能利用定积分的几何意义计算定积分； 2.能利用定积分的性质进行定积分大小的判断。	1.理解定积分的概念与几何意义； 2.了解可积的条件； 3.掌握定积分的基本性质。	培养学生对抽象数学语言的理解能力和知识运用能力
能力训练任务	任务 1　曲边梯形的面积 任务 2　变速直线运动的路程 任务 3　定积分概念 任务 4　定积分的几何意义 任务 5　定积分性质		
本次课使用的外语单词	定积分 definite integral　性质 property		
案例和教学材料	1.教材：《高等数学及其应用（第 3 版）》，吕同富，高等教育出版社，2018.4. 2.案例：曲边梯形的面积 3.案例：变速运动物体的路程		

单元教学进度

步骤	教学内容及能力/知识目标	教师活动	学生活动	时间分配
1（引入任务 1）	案例一：曲边梯形的面积计算 ①分割 ②近似 ③求和 ④取极限 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	提出问题：1.什么是曲边梯形？ 2.曲边梯形的面积能否按照直边梯形的面积公式计算？为什么？	思考	15 分钟

				
2（任务2）	案例二：变速直线运动的路程 ①分割 ②近似 ③求和 ④取极限 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$	讲解	学生观察两个实际问题中暗含的同一数学思想	10 分钟
3（任务3）	定积分的定义： $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 定积分的几何、物理应用 $A=\int_a^b f(x)dx$ $S=\int_a^b v(t)dt$ 注意：（1）若定积分$\int_a^b f(x)dx$存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上可积；闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$在$[a,b]$上可积。 （2）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_{\mathbf{a}}^b f(t)dt$。 （3）$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。 （4）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$。	教师讲授概念	思考：定积分是什么？怎么得来？如何表示？	20 分钟
4（任务4）	定积分的几何意义 （1）当$f(x)\geqslant 0$时，$\int_a^b f(x)dx$表示由曲线$y=f(x)$，两条直线$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形面积，即	讲解并强调注意事项	注意定积分与面积之间的关系	25 分钟

	$\int_a^b f(x)dx = A.$ （2）当 $f(x)$ ≤0 时，此时曲边梯形位于 x 轴的下方，$\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积的负值，即  $\int_a^b f(x)dx = -A.$ （3）当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时， $\int_a^b f(x)dx$ 表示上下各部分曲边梯形面积的代数和， 即 $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3.$ 例 1 利用定积分的几何意义计算定积分 （1）$\int_0^1 xdx$　　（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$			
5（任务5）	定积分的性质 1　函数的代数和的定积分等于它们的定积分的代数和，即 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$ 可推广到有限个函数代数和的情形 2　被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　（k 是常数） 3（积分对区间的可加性）　对任意三个实数 a，b，c，有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 4　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$	教师启发讲解，部分性质重点强调	师生研讨	15 分钟

	5 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$. 6（定积分估值定理）设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则： $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$ 7（定积分中值定理） 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a\leq\xi\leq b)$			
总结	定积分的定义是一个非常抽象、难以理解的定义，通过这个定义我们逐渐理解抽象的数学概念，并能将抽象的定义运用到实际的面积计算问题中去。在几何意义中，我们需要特别注意构成的图形的位置是在 x 轴的上方还是下方，分情况对待。			5 分钟
作业	1. 牢记基本初等函数的求导公式； 2. 课后练习题； 3. 预习下一节：不定积分的概念与性质。			
课后体会	过分强调应用性，就会使学生的数学素养缺失，最典型的就是不知道概念说了什么，不理解其中的深意。			

定积分的积分方法 单元教学设计

一、教案头

单元标题	定积分的积分方法	单元教学学时	8
		在整体设计中的位置	第 7 次

	能力目标	知识目标	素质目标
教学目标	①能够掌握定积分的换元法 ②能够掌握定积分的分部积分法	定积分的换元法 定积分的分部积分法	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力

能力训练任务及案例	任务 1　定积分的换元法 任务 2　定积分的分部积分法 任务 3　定积分的积分练习 案例 1　计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 案例 2　设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$ 案例 3　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$ 案例 4　计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx$
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社

单元教学进度

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 定积分的换元法 定积分的分部积分法 定积分的积分练习	陈述	板书	识记
2（引入任务1）	定积分的换元法与不定积分的换元法基本一致，不一样的地方就是多了上下限，最后需要利用牛顿莱布尼茨公式求解最后结果。 （1）第一种情况是上下限不变，等换元法计算结束，再代入原来的上下限 （2）第二种情况是换元时，也同时把上下限变换。 例 求 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 令 $\sqrt{x}=t$， $x=t^2$，当 $x=0$ 时 t=0，当 x=4 时 t=2，于是原式= $\int_0^2 \frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\left(t-\ln\|1+t\|\right)\Big\|_0^2$ $=2(2-\ln 3)$ 练习：求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$，提示：令 $\sqrt{e^x-1}=t$。 上面是比较明显的换元法，有时也可用凑微分法计算定积分。 例 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos t dt$ 解 注意观察，cost 可以转移到 d 的后面凑出 sint 来，然后把 sint 看成一个整体来解答 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t d\sin t=\frac{1}{3}\sin^3 t\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$ 这里实际上也是一个换元法，即令 sint=y，但是没写出而已。 练习 求解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}$，建议用两种方法求解，换元法令 $t=\tan\frac{x}{2}$，凑微分需要把 sinx 拆成 $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 下面是一个两个重要的结论：	学生阅读教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨

	（1）设 f(x)在对称区间[-a, a]上连续，则 当 f(x)时偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ 当 f(x)时奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ 学生自己从 176 页讨论证明 （2）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 案例 学生解答案例 1　案例 2　案例 3			
3 （任务 2）	不定积分的分部积分法是一种重要的积分方法，定积分的分部积分法也是重要的，不同点就是定积分增加上下限。 公式 $\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu$ 例 求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ 解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\sin x = x^2 \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x d\cos x = \frac{\pi^2}{4} + 2x\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$ 练习： （1）$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \lvert \ln x \rvert dx$ （2）$\int_{0}^{1} xe^{x^2} dx$ (3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$	学生阅读教师启发讲解	板书	师　生研讨

4 任务 3	定积分练习： （1）计算 $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ （2）计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$ （3）计算 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$ （4）计算 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$ （5）计算 $\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx$ （6）计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ （7）已知 $\int_0^{\ln a} e^x\sqrt{3-2e^x}dx=\frac{1}{3}$。求 a （8）当 $x>0$ 时，证明：$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ 案例 4 学生讨论解答	教师启发讲解	板书	师 生研讨
作业	整理课堂笔记			
课后体会	积分计算，不论是不定积分还是定积分，都是一个难点，需要多做练习强化知识的理解			

微分方程　单元教学设计

一、教案头

单元标题：	微分方程	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	①会判断给定方程是不是微分方程 ②能判断微分方程的阶 ③会验证函数是否是微分方程的解，并能判断是通解还是特解 ④能判断出方程是可分离变量的微分方程 ⑤会用分离变量法求解 ⑥常数变易法	了解微分方程的概念以及通解、特解、初始条件的概念；会解一阶微分方程	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力

能力训练任务及案例	任务 1　微分方程的概念 任务 2　解、通解、特解、初始条件的概念 任务 3　一阶微分方程求解
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社

二、单元教学进度

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 微分方程的概念	陈述	板书	识记
2（引入案例1）	一曲线经过(0,1)点，且在某点的切线斜率为该点横坐标的2倍，求此曲线方程.	学生列式求解	板书	
3（案例2）	列车在水平直轨上以 20m/s 的速度行驶，当制动时获得加速度-0.4m/s2，问开始制动后多久列车才能停住，以及制动后行驶的路程.	学生阅读 教师启发讲解	板书	师 生研讨
4（任务1）	微分方程：含有未知函数的导数或者微分的方程，称为微分方程，未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程，微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数，称为微分方程的阶。 例如 $y'+2x=3$，$\frac{dy}{dx}=3x(y+5)$，$y''+y'=\frac{x}{2}$ 都是常微分方程，前两个是一阶常微分方程，后一个是二阶常微分方程	教师启发讲解	板书	师 生研讨
5（任务2）	如果一个函数代入方程后使得方程两端相等，那么这个函数就称为微分方程的解。例如 $y=x^3+C$，$y=x^3-1$，都是微分方程 $y'=3x$ 的解。但是前面一个含有一个任意常数，可以表示很多解，后面一个解其实是含在前面一个解里面，所以前面的解称为通解，后面的解称为特解。 （3）为了确定微分方程的通解中的任意常数的值，需要给定一定条件，例如 $x=x_0$ 时对应的函数值是 $y(x_0)=y_0$，或者 $y\big\|_{x=x_0}=y_0$，这个条件就称为微分方程的初始条件。	教师启发讲解	板书	师 生研讨
6（任务3）	可分离变量的微分方程 形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)$ 的方程微分一阶可分离变量的微分方程。 例 求解 $y'+xy=0$ 的通解	学生阅读 教师启发讲解	板书	师 生研讨

	练习 （1）设 $y'=2x(y+2)$，求解通解 （2）案例 1 （3）案例 2			
7（任务 3）	形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的方程，称为一阶线性微分方程，其中 $P(x),Q(x)$ 都是已知函数 当 $Q(x)=0$ 时，称为齐次线性方程；当 $Q(x)\neq 0$ 时，称为非齐次线性方程 $y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C]e^{-\int P(x)dx}$ 例 求方程 $y'=\frac{y+x\ln x}{x}$ 课堂练习： （1） $y'+ay=b\sin x$ （2） $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^2}$ （3）案例 1	学生阅读 教师讲解	教师 提示	学生认真听讲 分组研讨
作业	整理课堂笔记，完成课堂练习			
课后体会	常微分方程需要能灵活判断方程类型，从而选择合适的求解方法			

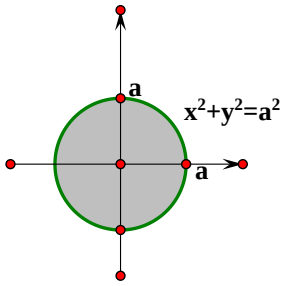
多元函数的极限、连续 单元教学设计

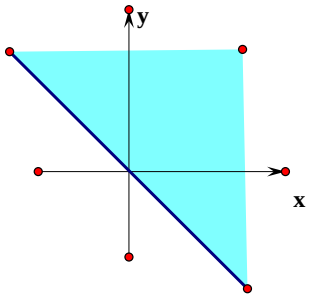
一、教案头

单元标题：	多元函数的极限、连续	单元教学学时	2
教	能力目标	知识目标	素质目标

<table>
<tr><td>学目标</td><td>①能够掌握多元函数的概念，特别是二元函数的概念、定义域求法
②了解多元函数特别是二元函数的极限求法
③了解多元函数特别是二元函数的连续定义</td><td>多元函数的概念，特别是二元函数的概念、定义域求法
多元函数特别是二元函数的极限求法
多元函数特别是二元函数的连续定义</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="3">任务 1　多元函数的概念与定义域
任务 2　多元函数的极限和连续
案例 1　求二元函数 $z=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-1}$ 的定义域
案例 2 判断 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在
案例 3　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 元函数的概念，特别是二元函数的概念、定义域求法 多元函数特别是二元函数的极限求法 多元函数特别是二元函数的连续定义	陈述	板书	识记
2（引入任务1）	二元函数定义 设有三个变量 x,y,z，如果当自变量 x,y 在他们的范围 D 内变化时，变量 z 按照一定的对应规律都有唯一的确定的值与他们对应，则 z 是变量 x,y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$ 一元函数的定义域是一个区间，二元函数的定义域是一个平面区域。常见的区域有 （1）矩形区域 $a<x<b,c<y<d$ （2）圆形区域 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ 例 求二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 定义域 解 由根式函数的要求知道，该定义域应该满足 $$x^2+y^2\le a^2$$ 所以，定义域是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$  例 求二元函数 $z=\ln(x+y)$的定义域 解 定义域是 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$	学生阅读教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨

	 课堂练习：案例 1			
3 （任务 2）	1、二元函数的极限，设二元函数 $z=f(x,y)$，如果当 (x,y) 以任意方式趋向点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋向于一个确定的常数 A，那么称 A 为二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$ 但是，要求二元函数的极限，其实并不容易，难就难在以任意方式趋近 (x_0,y_0)，这个任意方式如何界定。我们不可能把任意方式都能验证。所以简单的计算二元函数的极限，就是找一个关于 x,y 的关系，代入计算。 例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ 案例 2 案例 3 2、二元函数连续 二元函数连续与一元函数类似，就是极限值等于函数值，若果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，那么称 f(x,y)在点 (x_0,y_0) 处连续 一般情况下，二元函数在其定义域区域上都是连续的。	学生解答教师启发	板书	师 生研讨
课后体会	二元函数的定义、极限与连续与一元函数非常相似，要注意不同的地方，这部分仅作为了解内容。			

偏导数 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	偏导数	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	①能够掌握多元函数的偏导数的定义和求法②能够掌握高阶偏导数的求法	多元函数的偏导数的定义和求法	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练任务及案例	任务 1　多元函数的偏导数定义与求法 任务 2　高阶偏导数的定义与求法 案例 1　求 $z=e^x(\cos y+x\sin y)$ 的偏导数 案例 2 设函数 $z=x^3y-3x^2y^3$，求二阶偏导数		
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社		

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 多元函数的偏导数的定义和求法	陈述	板书	识记
2（任务 1）	理解偏导数内容与一元函数的导数有何区别和联系 设函数 $z=f(x,y)$，在点 (x_0,y_0) 上， 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限是	教师启发讲解	板书	师　生研讨

	函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或者 $z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或者 $f'_x(x_0,y_0)$ 同样道理可以定义关于 y 的偏导数，事实上，就是把 y 看做不动，对 x 求导。求导方法跟一元函数一致。 3、以上偏导数称作一阶偏导数，高阶偏导数就是在一阶偏导数的基础之上再求导数。设函数 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$ 例 求 $z=x^2\sin y$ 的偏导数 例 求 $z=x^y$ 的偏导数			
3 （任务2）	例 设函数 $z=x^3y-3x^2y^3$，求二阶偏导数 解 函数的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3$ $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2$ 二阶偏导数是 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y-6xy^3\right)=6xy-6y^3$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y-6xy^3\right)=3x^2-18xy^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-9x^2y^2\right)=3x^2-18xy^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-9x^2y^2\right)=-18x^2y$	教师启发讲解	板书	师 生研讨

	课堂练习 （1）求 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在(1,2)点的偏导数 （2）设 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$，求 $f_x'(1,0)$ （3）求 $u=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{xy}{z}$ 的偏导数 （4）求 $z=(1+x)^{xy}$ 的偏导数			
作业	检查求导公式背诵			
课后体会	偏导数的计算本质上就是一元函数导数的计算，偏向某个自变量时要将其他自变量看成常数处理。			

全微分 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	全微分	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	能够掌握多元函数的全微分的概念，特别是二元函数的全微分	多元函数的全微分的概念，特别是二元函数的全微分	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练任务及案例	任务 1　多元函数的全微分概念		
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社		

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 多元函数的全微分的概念，特别是二元函数的全微分	陈述	板书	识记
2（引入任务1）	1、二元函数全微分概念 设二元函数 $z=f(x,y)$，如果 (x,y) 处函数的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数与一个比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小，即 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是二元函数在点 (x,y) 处的全微分，记作 $$dz=A\Delta x+B\Delta y$$ $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。 同理，设三元函数 $u=f(x,y,z)$，则全微分是 $$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$ 2、举例 例　求函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2,-1)$ 处，当 $\Delta x=0.02,\Delta y=-0.01$ 时的全增量和全微分 解 有定义知，全增量 $\Delta z=(2+0.02)^2(-1-0.01)^2-2^2(-1)^2=0.1624$ 函数的两个偏导数	学生阅读教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨

	$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$ 都是连续的，所以全微分是存在的，于是所求在点$(2,-1)$ 处的全微分为$dz=4*0.02+(-8)*(-0.01)=0.16$ 可见全微分的数值与全增量的数值基本一致。 例 求$z=e^x\sin(x+y)$的全微分 解 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin(x+y)+e^x\cos(x+y)$ $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos(x+y)$ 所以$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ $=e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^x\cos(x+y)dy$ 练习：案例 1 案例 2			
作业	课堂练习完成			
课后体会	全微分的核心还是偏导数的计算，所以求导公式的背诵尤为重要			

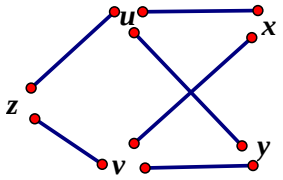
多元函数的微分 单元教学设计

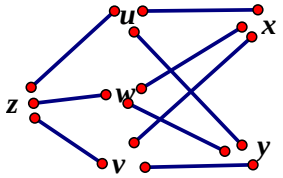
一、教案头

单元标题：	多元函数的微分	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	能够掌握多元函数隐函数的全微分	复合函数的微分的定义与求法	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练	任务 1　复合函数的微分		

任务及案例	案例 1　$z=f(e^{xy},siny)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 案例 2　$z=f(x+y-z)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 复合函数的微分的定义与求法	陈述	板书	识记
2（任务 1）	多元复合函数的复合关系多种多样，只要把握函数间的复合关系以及函数对某个自变量求偏导时，应通过一切有关的中间变量，用复合函数微分法到该自变量这一原则求偏导数即可 1、设复合函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\Psi(x,y)$  所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$ 2、设复合函数 $z=f(u,v,w)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$， $w=w(x,y)$	学生解答教师启发	板书	师　生研讨

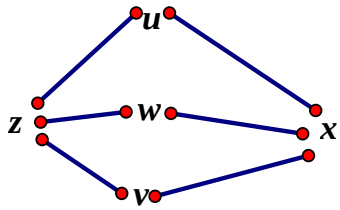


$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

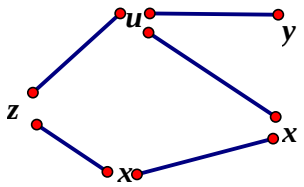
3、设复合函数 $y=f(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w})$， $u=u(\mathrm{x})$， $v=v(\mathrm{x})$，

$w=w(\mathrm{x})$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

4、设复合函数 $z=f(\mathrm{u},\mathrm{x})$， $u=\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

以上是几种复合函数的全微分，需要理解掌握

例 $z=e^{u\cos v}$， $u=xy$， $v=\ln(\mathrm{x}-\mathrm{y})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$

学生处理以下例题与练习

1、 $z=f(\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2,\mathrm{xy})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$

	2、$z=u^2v$，$u=\cos x$，$v=\sin x$，求$\dfrac{dz}{dx}$			
作业	课后链式法则计算练习			
课后体会	链式法则需要大家清楚复合函数的复合过程，画出复合结构图，由图推导求导公式			

多元函数的极值 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	多元函数的极值	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	能够掌握多元函数极值的定义 会判断二元函数的极值 会建立实际问题中的最值模型并求解	二元函数极值的定义和计算方法	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练任务及案例	任务 1　二元函数的极值 案例 1　求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值 案例 2　用铁皮做一个体积为 V 的无盖长方体箱子，问箱子的尺寸为多少时才能使铁皮最省？		
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社		

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动

1 （告知）	本单元学习目标： 二元函数极值的定义和计算方法	陈述	板书	识记
2 （任务1）	设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义， 如果对于该邻域内任意异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都有 $$f(x,y)<f(x_0,y_0)$$ 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有**极大值** $f(x_0,y_0)$，点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大值点**；同理，如果都有 $$f(x,y)>f(x_0,y_0)$$ 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有**极小值** $f(x_0,y_0)$，点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的**极小值点**. **例1** 函数 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(0,0)$ 处有极小值 **例2** 函数 $f(x,y)=xy$ 在点 $(0,0)$ 处不存在极值 **定理1** （**极值的必要条件**） **定理2** （**极值的充分条件**） 教师讲解 案例1 求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值 **拉格朗日乘数法**. 函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值求法步骤如下： （1）构造拉格朗日辅助函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为待定常数. （2）解方程组 $\begin{cases}F_x'=0\\F_y'=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$	学生解答教师启发	板书	师生研讨

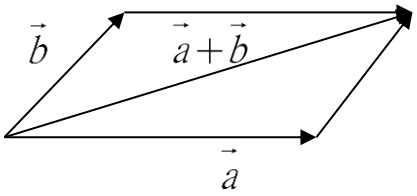
	即解 $\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 求出可能的极值点(x,y)，在实际问题中往往此点就是所求的极值点. 教师讲解案例 2　用铁皮做一个体积为V 的无盖长方体箱子，问箱子的尺寸为多少时才能使铁皮最省？			
作业	课后极值练习题			
课后体会	二元函数极值的理论体系与一元函数极值非常相似，知识点也差不多，所以可以对照一元函数极值来理解			

向量及其坐标表示 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	向量及其坐标表示	单元教学学时	2
教学目标	能力目标	知识目标	素质目标
	1.了解空间直角坐标系的基本概念 2.掌握空间两点距离公式 3.理解向量的概念，掌握向量的坐标表示法，会求单位向量、方向余弦 4.掌握向量的线性运算 5. 向量的数量积与向量积的计算方法 6.掌握两向量平行、垂直的条件	向量代数的概念及线性运算、坐标表示； 向量的数量积与向量积的概念及计算	①深刻思维能力 ②团结合作能力 ③语言表达能力
能力训练任务及案例	任务 1　向量的概念 任务 2　线性运算 任务 3　空间直角坐标系的建立 任务 4　空间点的坐标 任务 5　向量的坐标表达式 任务 6　数量积的概念和计算 任务 7　向量积的概念和计算		
教学材料	高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社 高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社 高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社 高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社		

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1（告知）	本单元学习目标： 向量代数的概念及线性运算、坐标表示	陈述	板书	识记
2 引入	引入问题：代数与几何的研究对象 解析几何的发展和应用 笛卡尔的简介	教师讲解	板书	
3 新课	1.向量的概念 在现实世界中，我们常见到两类量：一类是数量，如温度、长度、质量等，这类量只有大小，没有方向也称为标量；还有一类量既有大小也有方向 如力、速度、加速度等，这类量称为向量或矢量。我们也常用有向线段来表示向量，以 为起点 为终点的有向线段所示的向量。 向量 的大小称为该向量的模。模等于 1 的向量称为单位向量。与 同向的单位向量记为 ；模等于 的向量称为零向量，规定零向量的方向为任意方向。 2.线性运算  3.空间直角坐标系 4.向量的坐标 设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$， $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$ $=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ 5.坐标 6.方向余弦 $\cos\alpha=\frac{a_1}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$	学生思考 教师提示	板书	师 生研讨

	$\cos\beta=\frac{a_2}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}$ $\cos\gamma=\frac{a_3}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}$			
4（任务 6）	定义：设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$之间夹角为θ $0\le\theta\le\pi$ ，则称 $\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$ 为$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**或**点积**。 学生解决：已知基本单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是三个相互垂直单位向量，求证 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ 归纳运算律： 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ 坐标表示： 设$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ 则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ **定理** 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$正交的充分必要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$或 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ 案例 1 试证向量$\vec{a}=\ 1,2,3\ $与$\vec{b}=\ 3,3,-3\ $正交.	教师启发讲解	板书	师 生研讨
5（任务 7）	定义：设有两向量$\vec{a},\vec{b}$，若向量$\vec{c}$满足： （1）$\left\|\vec{c}\right\|=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$； （2）$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$、$\vec{b}$所决定的平面，它的正方向由右手	学生思考教师提示	板书	师 生研讨

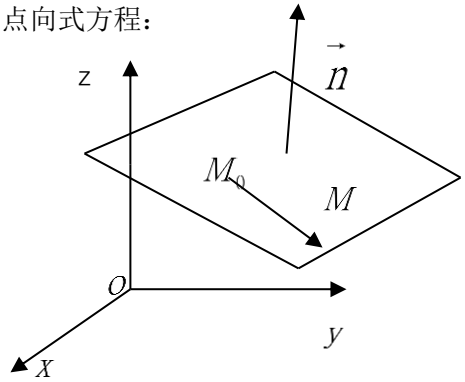
	法则确定，， 则称向量$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**（或称为**叉积**），记为$\vec{a}\times\vec{b}$，即 $$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$ 向量积满足如下运算规律： 反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 左分配律：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 右分配律：$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$ 与数因子的结合律与交换律：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\lambda\vec{b}$ 学生验证：$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{a}\times\lambda\vec{a}=\vec{0}$. 行列式可以帮助计算： $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$ 定理：两个非零向量平行的充分必要条件是$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$或 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$（当b_1,b_2,b_3全不为零时） 案例 2　设$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-3\vec{k}$，求$\vec{a}\times\vec{b}$. **解**　$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$ 案例 3　求同时垂直于向量$\vec{a}=\{4,5,3\}$和$\vec{b}=\{2,2,1\}$的单位向量$\vec{c}^{0}$.			
课后体会	向量的概念大部分同学在中学已经学过，所以对概念只要简单回顾就好，包括数量积也是，重点讲解向量积即可。			

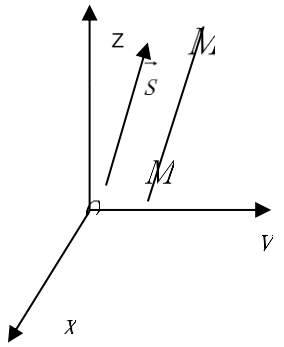
平面及直线方程 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td colspan="2">单元标题：</td><td>平面及直线</td><td>单元教学学时</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td colspan="2">知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td>1. 会求平面的点法式方程、一般式方程
2. 会判断两平面的垂直、平行
3. 了解直线的一般式方程，会求直线的点向式方程、参数式方程
4. 会判断两直线平行、垂直
5. 会判断直线与平面的位置关系（垂直、平行、直线在平面上）</td><td colspan="2">平面的点法式方程
平面的一般式方程
平面的位置关系
直线的一般式方程
点向式方程
参数式方程
直线的位置关系
直线与平面的位置关系</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="4">任务 1 平面的点向式方程
任务 2 平面的一般式方程
任务 3 平面的夹角
案例 1 求由点 $A\ 1,0,0$ ， $B\ 0,1,0$ ， $C\ 0,0,1$ 所确定的平面方程.
案例 2 设一平面过点 $M_1(1,0,-2)$ 和 $M_2(1,2,2)$ 且与向量 $\vec{a}=\ 1,1,1$ 平行，试求此平面的方程.
案例 3 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 的夹角 θ.
任务 4 直线的一般式方程
任务 5 点向式方程
任务 6 参数式方程
任务 7 方程之间的变换
任务 8 直线的夹角
案例 4 求过点 $M\ 6,6,4$ 且垂直于平面 $\pi:5x+y-3z+5=0$ 的直线方程.
案例 5 求通过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 L 的方程.
案例 6 写出直线 L：$\begin{cases}2x-y+3z-7=0\\3x+y-3z+2=0\end{cases}$ 的点向式方程.
案例 7 求直线 $L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-12}=\dfrac{z+1}{3}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ 的夹角.</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动
1 （告知）	本单元学习目标： 平面及直线	陈述	板书	识记
2 （任务1）	点向式方程：  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 案例 1 求由点 A 1,0,0 ， B 0,1,0 ， C 0,0,1 所确定的平面方程.	教师启发讲解	板书	师 生研讨
3 任务 2	一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 案例 2 设一平面过点 $M_1(1,0,-2)$ 和 $M_2(1,2,2)$ 且与向量 $\vec{a}=$ 1,1,1 平行，试求此平面的方程.	学生思考教师提示	板书	师 生研讨
4 任务 3	两平面法向量的夹角，称为**两平面的夹角**. 设平面 π_1,π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，它们的夹角为 θ，	学生思考教师提示	板书	师 生研讨

	$\cos\theta=\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_1\right)=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left\|\vec{n}_1\right\|\left\|\vec{n}_2\right\|}$ $=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 两平面平行的充要条件为$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$， 两平面重合的充要条件为$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$. 案例 3　求两平面$2x-y+z-7=0$和 $x+y+2z-11=0$的夹角θ.			
5 任务 4	一般式方程 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	教师启发讲解	板书	师　生研讨
6 任务 5	点向式方程  $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 案例 1　求过点$M\ 6,6,4$ 且垂直于平面 $\pi:5x+y-3z+5=0$的直线方程. 案例 2　求通过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线L的方程.	学生思考教师提示	板书	师　生研讨

7 任务 6	参数式方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$	学生思考 教师提示	板书	师 生研讨
8 任务 7	案例 3　写出直线 L：$\begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ 3x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ 的点向式方程.			
9 任务 8	空间两直线方向向量的夹角称为**两直线的夹角**. 设直线 L_1 和 L_2 的方程分别为 $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ 和 $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ $\cos\theta = \cos\left(\vec{s}_1, \vec{s}_1\right) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\left\|\vec{s}_1\right\|\left\|\vec{s}_2\right\|}$ $= \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ 两直线 L_1, L_2 垂直的充要条件为： $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ 两直线 L_1, L_2 平行的充要条件为： $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ 案例 4 求直线 $L_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z+1}{3}$ 和 $L_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ 的夹角.			

作业	整理课堂笔记，备考
课后体会	平面及直线方程的确定主要用到向量平行与垂直的关系，所以掌握向量基础知识对于建立平面与直线方程非常有帮助