1.1 函数 课程单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2">函数</td><td>单元教学学时</td><td>4</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td>第 1、2 次</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能熟练把握函数的概念,确定变量关系
②能够了解并确定函数的定义域与对应法则
③能够熟练判断两个函数是不是同一个函数
④能够掌握复合函数分解与合成</td><td>①函数概念
②定义域
③对应法则
④函数表示
⑤复合函数</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="4">任务 1　查阅资料，函数的历史
任务 2　理解函数的两个要素
任务 3　如何求解函数的定义域
任务 4　如何判断两个函数是同一个函数
任务 5　阅读教材第 3 页 总结函数的表示方法
任务 6　什么是分段函数？学生分组讨论，给出自己的想法
任务 7　函数四个特性回忆与加强
任务 8　复合函数分解与合成
案例 1（速度距离问题）　一个物体速度是 v，行驶路程是 s，那么经过时间 t，它形式了多么长的距离？
案例 2（纳税问题）　搜集中国的个人收入所得税纳税标准，设某人月工资 x 元，请建立他的纳税税额函数。
案例 3　任意两个函数是否都能合成一个函数；如何分解一个复合函数。
案例 4（人口问题）　1982 年底，我国人口 10.3 亿，按照年均 20%的自然增长率，到 2013 年底，我国人口将是多少？
案例 5（奖学金等级问题）　了解日照职业技术学院的奖学金发放规则，建立奖学金的分段函数
案例 6（贷款抵押模型）设二室一厅的商品房价值 100000 元，某人自筹资金 40000 元，要购房还需要借款 60000 元，条件是每年还一些，25 年还清，房子就归债权人，该人具备什么能力才能借款？</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="4">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1（告知）	本单元学习目标： ①函数概念；②定义域；③对应法则；④函数表示；⑤分段函数；⑥函数性质；⑦复合函数	陈述	板书	识记	5 分钟
2（引入任务 1）	查阅资料 函数概念发展历史 出示案例 1，引入函数概念	学生阅读自主讨论	教师提示	分组研讨	5 分钟
3（任务 2）	函数的两个要素：对应法则、定义域 什么是对应法则？ 什么是定义域？ 学生阅读课本总结	教师启发讲解	板书	师生研讨	5 分钟
4（任务 3）	求解函数的定义域： 例 1　求 $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$ 定义域 例 2　求 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-x+6}}{x}$ 定义域 例 3　求 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 定义域	教师引导法学生分组学习	学生演示	学生讨论	10 分钟
5（任务 4）	如何判断两个函数是同一个函数，判断下列函数是不是同一个函数？ （1）　$y=\ln x^2, y=2\ln x$ （2）　$w=\sqrt{u}, y=\sqrt{x}$ （3）　$y=\sqrt{9-x^2}$，$y=\sqrt{(3-x)(3+x)}$	教师重复提示函数的两个要素，引导学生注意	黑板演示	学生讨论	15 分钟
6（任务 5）	阅读教材第 3 页 总结函数的表示方法 （1）　图表法：列表表示 x, y 的关系 案例应用：统计我们学院某月每天的温度，做出温度和日期的对应图表。 （2）　图像法：画图表示 x, y 的关系 案例应用：将上述温度和日期的对应图表用图像表示出来，x 轴表示日期，y 轴表示温度	学生根据函数含义自行举例	黑板展示	学生讨论	5 分钟

	（3） 解析法：用一个式子来表达函数，例如 $y=x^2+2x$				
7 （任务6）	分段函数 表达式以及定义域 例 $f(x)=\begin{cases}0,-1<x\le 0\\ x^2,1<x\le 3\\ 3x-6,3<x\le 5\end{cases}$ ，求f(1),f(-0.5)，f(3.5) 例 画出分段函数 $\mathrm{y}=\begin{cases}x^2+1,x>0\\ 2,x=0\\ 3x,x<0\end{cases}$	学生阅读课本，自主学习	黑板展示	学生讨论	20分钟
8 （任务7）	函数的四个特性： 1、有界性 若存在正数M，使得$\lvert f(x)\rvert\le M$，则称$f(x)$在I上有界。例如$\sin x$在实数域上有界。 2、单调性 （1）如果与定义域内任意两个点x_1,x_2且$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$，则$f(x)$在I上单调增加 （1）如果与定义域内任意两个点x_1,x_2且$x_1<x_2$，有$f(x_1)>f(x_2)$，则$f(x)$在I上单调减少 例 证明$y=3x+2$在其定义域内的单调性 3、奇偶性 设I是个对称区域，如果任意的$x\in I$，有$\mathrm{f(-x)=f(x)}$，则称$f(x)$在I上是偶函数；如果任意的$x\in I$，有$\mathrm{f(-x)=-f(x)}$，则称$f(x)$在I上是奇函数 例 判断下列函数的奇偶性 （1）$y=3x^4-5x^2+7$ （2）$y=2x^3+\sin x$ （3）$y=\frac{1}{2}\left(a^{-x}-a^{x}\right)$	教师分别讲解	黑板演示	学生听讲	50分钟

	4、周期性 如果存在不为零的数 T，使得任意的 $x \in I$，有 $f(\mathrm{x}+\mathrm{T})=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 上周期函数。例如正弦函数 $\sin(\mathrm{x}+2\pi)=\sin\mathrm{x}$， 2π 是最小正周期。				
9 （任务8）	复合函数的合成与分解 这是重点内容，直接涉及后面的复合函数求导 例 $y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ 分解： $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=\frac{x}{2}$ 例 $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$ 分解 $y=e^u, u=\sin v, v=x^2+1$ 练习：分解下列复合函数 (1) $y=\left(2x^2+x+2e^x\right)^2$ (2) $y=\left(2x+1\right)^{100}$ (3) $y=[\sin(3\mathrm{x}+5)]^2$ (4) $y=\sin^2(1+2\mathrm{x})$ (5) $y=\cos\frac{1}{x-1}$ (6) $y=e^{\ln\sin x}$ 注意：复合函数分解到简单函数为止。简单函数就是有基本初等函数经过有限次四则运算合成的函数。	教师讲解 学生演练	黑板演示 黑板展示	学生讨论学习	45 分钟
10 操练深化	应用案例在课堂进行中解答	学生自行研究			55 分钟
作业	将案例 6 上作业　设二室一厅的商品房价值 100000 元，某人自筹资金 40000 元，要购房还需要借款 60000 元，条件是每年还一些，25 年还清，房子就归债权人，该人具备什么能力才能借款？				
课后体会					

2.1 极限 单元教学设计

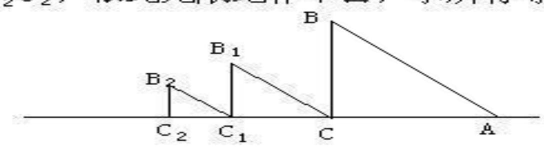
一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">极限</td><td>单元教学学时</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td colspan="2">第 3、4、5、6 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td>上课地点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">能够熟练掌握极限的六种过程</td><td>极限 6 种过程</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　查阅资料，了解极限的含义

任务 2　阅读课本，学习极限 $x \to x_0^+$

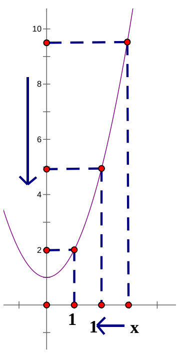
任务 3　在任务 2 完成的基础上，自学 $x \to x_0^-$，$x \to x_0$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$

案例 1（老人分遗产）　一个老人有 17 头牛，他打算把这 17 头牛的 $\frac{1}{2}$ 分给老大，$\frac{1}{3}$ 分给老二，$\frac{1}{9}$ 分给老三，请问改怎么分？提示：采取极限思想，一头牛分 $\frac{17}{18}$，剩下 $\frac{1}{18}$。

答案：老大 9 头，老二 6 头，老三 2 头牛。
案例 2 （无穷直角三角形面积）
如图，在Rt△ABC中，AC=BC=a，在AC延长线上取一点C_1，使AC_1=AB，再以CC_1为直角边作等腰Rt△CB_1C_1，在CC_1的延长线上再取一点C_2，使CC_2=CB_1，再以C_1C_2为直角边作等腰Rt△$C_1B_2C_2$，依此无限地作下去，求所有等腰Rt△的面积之和。


案例 3　$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 函数的六种极限过程 $x \to x_0^+$， $x \to x_0^-$， $x \to x_0$， $x \to +\infty$， $x \to -\infty$， $x \to \infty$	陈述	板书	识记	2 分钟
2 （引入任务 1）	查阅资料 了解极限含义	学生阅读自主讨论	教师提示	分组研讨	5 分钟
3 （任务 2）	阅读课本，学习极限 $x \to x_0^+$ 设一个函数 $y = f(x)$，给定点 x_0 （1） $x \to x_0^+$ 表示自变量 x 从右侧（数轴的正方向）趋向 x_0，随着 x 从右侧趋向 x_0，f(x) 函数值趋向一个数，这个数就是 f(x) 的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$。 （2）举例 例 1　计算 $\lim\limits_{x \to 1}(x^2+1)$ $y = x^2+1$ 的图像是 	画图法教师启发讲解	板书	师生研讨	30 分钟

	可见，随着 $x\to 1^+$ 时，$(x^2+1)\to 2$。因此 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)$=2 注：此极限 2 也就是把 x=1 代入 x^2+1 所得到的。 例 2　计算 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$ 这个极限就不能直接把 x=1 导入到函数里面，因为无意义。所以应当先分解。 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ 练习 1、$\lim\limits_{x\to 2^+}(3x^2+x-4)$ 2、$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}$ 3、$\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$				
4（任务 3）	在任务 2 完成的基础上，自学 $x\to x_0^-$，$x\to x_0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$	教师引导法 学生练习法	学生演示	学生讨论	60 分钟
5（操练）	求解下列极限： 例 1 $f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\1, x=0\\x, x>0\end{cases}$，画出函数图像，讨论 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 例 2 $\mathrm{sign}x=\begin{cases}-1, x<0\\0, x=0\\1, x>0\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$	教师提示， 引导学生注意	黑板演示	学生讨论	30 分钟

	例 4 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x<0\\x,x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 例 5 分析 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x_{n-1}+\cdots+b_n}$ Key: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty,m<n\\\dfrac{a_0}{b_0},m=n\\0,m>n\end{cases}$				
6（案例）	案例在课堂进行中解答				
作业	21 页 1				
课后体会					

2.2 无穷小 无穷大 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2">无穷小 无穷大</td><td>单元教学学时</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td colspan="2">第 7、8 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td></td><td>上课地点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td>①能够理解无穷小的概念
②能够应用无穷小性质计算某些函数极限
③能够理解无穷大的概念
④能够掌握无穷小和无穷大的倒数关系，并相互求解</td><td>无穷小
无穷大</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="4">任务 1　无穷小概念
任务 2　阅读课本，学习无穷小性质及应用
任务 3　学习无穷大概念，理解无穷大与无穷小关系
案例 1 求 $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2}$
案例 2　求 $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$
案例 3　求 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 在什么情况下是无穷小，在什么情况下是无穷大。</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="4">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1（告知）	本单元学习目标： 无穷小，无穷大	陈述	板书	识记	5 分钟
2（引入任务 1）	学生阅读，无穷小概念 极限为零的函数叫做在该极限过程下的无穷小。特别注意，无穷小不是很小很小的数。 例 下列函数在什么情况下是无穷小？ （1） $y=\frac{1}{x-1}$ （2） y=2x−1 （3） $y=2^x$ （4） $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$	学生阅读自主讨论	教师提示	分组研讨	15 分钟
3（任务 2）	无穷小性质 （1）四条无穷小性质中最重要的是什么？ a) 有限个无穷小的代数和是无穷小 b) 无穷小与无穷小的积是无穷小 c) 常数与无穷小的积是无穷小 d) 有限个无穷小的积是无穷小 （2）计算 例 $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^3}$ 例 $\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x}$ 例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$	教师启发讲解	板书	师生研讨	30 分钟
4（任务 3）	无穷大 在某极限过程下，函数值的绝对值无限变大的函数叫做在该极限过程下的无穷大。 （1）无穷大就是很大很大的一个数吗？ （2）无穷大与无穷小什么关系 无穷大与无穷小是倒数关系。	教师引导法 学生练习法	学生演示	学生讨论	15 分钟

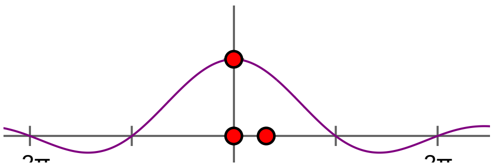
	下列函数在怎么样的情况下是无穷大？ （1） $y=\frac{1}{x-1}$ （2） y=2x-1 （3） $y=2^x$， （4） $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ （5） y=lnx				
5 （操练案例）	案例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2}$ 案例 2 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ 案例 3 求 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 在什么情况下是无穷小，在什么情况下是无穷大。	教师提示,引导学生注意		学生讨论	30 分钟
作业	22 页 2 5 6				
课后体会					

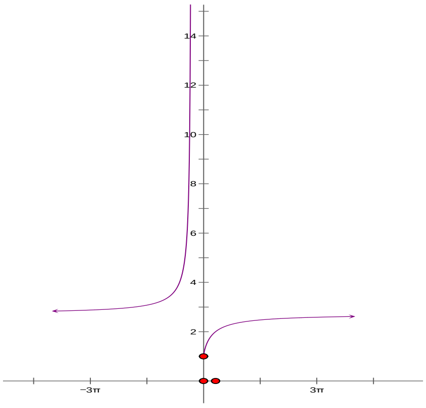
2.3 两个重要极限 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2">两个重要极限</td><td>单元教学学时</td><td>8</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td>第 9、10、11、12 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td></td><td>上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td>①能够理解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$ 并应用
②能够理解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 并应用
③能够运用无穷小替换求极限</td><td>掌握 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$
掌握 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$
掌握无穷小替换定理</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="3">任务 1　理解并证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$
任务 2　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$ 在若干极限中的应用
任务 3　理解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$
任务 4　$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 在若干极限中的应用
任务 5　无穷小替换定理
案例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{\sin x^3}$　　　案例 2　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+x^2\right)^{x^{-2}}$
案例 3　求证 $x\to 0$，e^x -1 与 x 是等价无穷小
案例 4　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$　注：这个问题是个竞赛题，需要学生讨论解决</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$并应用 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$并应用 运用无穷小替换求极限	陈述	板书	识记	5 分钟
2 （引入任务 1）	学生阅读自学，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$ （1）这个极限要注意三点，那三点？ （2）这个极限如何使用？ （3）这个极限如何证明？ 	教师画图讲解	教师提示	分组研讨	15 分钟
3 （任务 2）	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$应用 学 生 先 讨 论： 如 何 应 用 这 个 极 限 ？ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=0$对吗？为什么？ 例 1　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$ 例 2　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ 例 3　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ 例 4　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$	教师启发讲解	板书	师生研讨	30 分钟

4（任务3）	理解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$  （1）这个极限要注意什么？ （2）你打算如何使用这个极限？ （3）$\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e??$	教师画图讲解	学生听讲	学生讨论	15 分钟
5（任务4）	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 应用 例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ 例 2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ 例 3 $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$（注：这个也是公式） 例 4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x}$	教师提示，引导学生注意	黑板演示	学生讨论	30 分钟
6（任务5）	无穷小替换定理 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}$ （1）无穷小替换要注意什么事项？ （2）你都知知道那些常用等价无穷小？总结出来，并记忆 用无穷小替换定理处理下题 例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}$	教师讲解	黑板演示	学生听讲	40 分钟

	例 2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x^3}{\sin x^2}$ 例 3 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$				
7 案例	案例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x^3}{\sin x^3}$（要求：两种方法） 案例 2 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + x^2\right)^{x^{-2}}$ 案例 3 求证 $x \to 0$，e^x -1 与 x 是等价无穷小 案例 4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x + x^2 \cos \dfrac{1}{x}}{(1 + \cos x)\ln(1 + x)}$（注：这个问题是个竞赛题，需要学生讨论解决）	教师指导			45 分钟
作业	28 页 1 2				
课后体会					

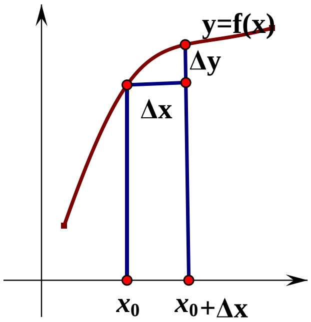
2.4函数的连续性 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">函数的连续性</td><td colspan="2">单元教学学时</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">在整体设计中的位置</td><td>第 13、14 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够理解自变量增量、函数的增量概念
②能够理解函数的连续的图像定义和两个公式定义
③能够理解函数的间断点并简单判断</td><td>掌握自变量增量、函数的增量概念
掌握函数两个的定义
掌握间断点</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　理解增量
任务 2　利用增量定义函数连续
任务 3　分辨间断点
案例 1 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
案例 2　求 $\lim_{x\to 1}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$
案例 3　$f(x)=\frac{x^2-1}{x(x-1)}$ 的间断点类型
案例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1+e^x, x<0\\ x+2a, x\geq 0\end{cases}$，问常数 a 何值时，函数 f(x) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 增量 函数的连续性 间断点	陈述	板书	识记	5 分钟
2 （引入任务 1）	增量 （1）自变量的增量 例 1 设一个物体以每秒 3 米的速度行进，$t_0=1$，$t_1=2$，那么从$t_0=1$到$t_1=2$时间增加了多少？这个增加的时间$\Delta t=2-1=1$就是时间的增量 例 2 y=2x+1, x 从 1 增加到 3.5，x 的增量是多少？ （2）函数的增量 随着自变量的增量而改变的函数的增量 例 1 当$t_0=1$到$t_1=2$时间增加时，路程增加了多少？这就是时间 t 的函数路程的增量。 例 2 x 从 1 增加到 3.5 时，函数 y 增加了多少？ 以后自变量增量记作$\Delta x=x_1-x_0$，$x_1=x_0+\Delta x$；函数增量记作$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$， $f(x_1)=f(x_0)+\Delta y$	教师画图讲解	教师提示	分组研讨	15 分钟
3 （任务 2）	增量定义函数连续	教师启发讲解注意两个定义的过度	板书	师生研讨	30 分钟

	 函数的连续，从图像上来说就是函数图像不间断。 第一个定义：函数在 x_0 连续，那么 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 第二个定义：函数在 x_0 连续，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 根据连续性 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$				
4 （任务3）	间断点 根据连续的第二个定义，启发学生，函数在一个点如果不连续，会有几种情况： （1）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，但是不相等 （2）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在），但是不等于函数值 $f(x_0)$ （3）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 至少一个不存在 例 1 判断 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的间断点	教师画图讲解启发学生	学生听讲	学生讨论	30 分钟

	例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\le x\le 1\\ x+1,x>1\end{cases}$,讨论 f(x) 在 x=1 处的连续性，1 是什么间断点 例 3 $f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{x}^4}{x},x\ne 0\\ 1,x=0\end{cases}$，讨论 f(x)在 x=0 处的连续性，0 是什么间断点				
5（案例）	案例应用 案例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 案例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 案例 3 $f(x)=\frac{x^2-1}{\mathrm{x(x-1)}}$ 的间断点类型 案例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1+e^x,x<0\\ x+2a,x\ge 0\end{cases}$,问常数 a 何值时，函数 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$上连续	教师提示,引导学生注意	黑板演示	学生讨论	50 分钟
作业	34 页 7 8 9 10				
课后体会					

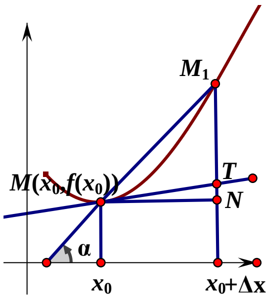
3.1 导数概念 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	导数概念	单元教学学时	4
		在整体设计中的位置	第 15、16 次
授课班级		上课地点	

<table>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td>①能够变速直线运动速度、切线斜率
②能够抽象出导数概念
③能够利用导数概念计算导数
④能够计算高阶导数
⑤能够总结基本函数的导数运算公式</td><td>导数概念
左右导数
计算导数</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="3">任务 1　理解变速直线运动速度、切线斜率
任务 2 抽象导数概念
任务 3 简单计算导数、高阶导数
任务 4 总结基本函数的导数运算公式
案例 1（电流强度模型）　电流强度模型 设在时间$[0,t_0]$这段时间内通过导线横截面的电流是$Q=Q(t)$，利用导数概念分析电流强度
案例 2 （细杆的线密度模型） 设一根质量非均匀分布的细杆放在 x 轴上，在[0,x]上的质量是 x 的函数 m=m(x),求杆上点x_0处的线密度</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 瞬时速度，切线斜率 导数概念，高阶导数	陈述	板书	识记	5 分钟
2 （引入任务 1）	（1）瞬时速度 设一个物体的路程与时间的函数是 s=s(t)，试研究在时刻 t_0 时的瞬时速度 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ （2）切线斜率 函数 y=f(x)在 x_0 处的切线斜率 $\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$  	教师画图讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨	50 分钟
3 （任务 2）	导数 通过任务 2，抽象出任意函数 f=f(x)在 x_0 的导数概念 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-s(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+x)-s(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	教师启发讲解注意两个定义公式	板书	师生研讨	50 分钟

	左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+x)-s(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 例 求 $y=x^3$ 在 x=2 处的导数 例 求 $y=\sin x$ 在 x_0 处的导数 例 求 $y=\cos x$ 在 x_0 处的导数 例 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$ 例 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$ 例 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(a-2h)-f(a)}=\dfrac{1}{4}$，求 $f'(a)$				
4（任务3）	高阶导数 在一阶导数的基础上再求导就是二阶导数 在二阶导数的基础上再求导就是三阶导数 以此类推 一阶导数记作：$y',\dfrac{dy}{dx}$ 二阶导数记作：$y'',\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 三阶导数记作：$y''',\dfrac{d^3y}{dx^3}$ n 阶导数记作：$y^{(n)},\dfrac{d^n y}{dx^n}$ 例 计算 $y=x^3$ 的二阶导数 例 计算 $y=\sin x$ 的二阶导数 例 计算 $y=\cos x$ 的二阶导数	教师启发讲解	板书	师生研讨	40 分钟

5 （任务 4）	总结基本初等函数的导数运算公式 (1) $(C)'=0$　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ (3) $(\sin x)'=\cos x$　(4) $(\cos x)'=-\sin x$ (5) $(\tan x)'=\sec^2 x$　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$ (7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$ (9) $(a^x)'=a^x\ln a$　(10) $(e^x)'=e^x$ (11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$， (13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　(16) $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	学生讨论总结			30 分钟
5 （案例）	案例应用 案例 1　电流强度模型 设在时间$[0,\mathrm{t}_0]$这段时间内通过导线横截面的电流是$Q=Q(t)$，利用导数概念分析电流强度 案例 2　细杆的线密度模型 设一根质量非均匀分布的细杆放在 x 轴上，在[0,x]上的质量是 x 的函数 m=m(x)，求杆上点x_0处的线密度	学生分组自主学习法		学生讨论	35 分钟
作业	默写基本初等函数导数公式				
课后体会					

3.2 求导法则 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">求导法则</td><td>单元教学学时</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td colspan="2">第 17-20 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td>上课地点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td colspan="2">知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握导数的四则运算并运用
②能够掌握复合函数求导数法则并运用
③能够掌握反函数求导法则并运用
④能够掌握隐函数求导法则并运用
⑤能够掌握对数求导法则并运用
⑥能够掌握参数方程求导法则并运用</td><td colspan="2">导数运算法则 6 条</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　导数的四则运算
任务 2　复合函数求导数法则
任务 3　反函数求导法则
任务 4　隐函数求导法则
任务 5　对数求导法则
任务 6　参数方程求导法则
案例 1　$\mathrm{f}(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos x}$，求 $f'(x)$， $f''(x)$
案例 2（注水问题）　若水以 2 立方米/分的速度灌入一个高为 10 米的、底面半径是 5 米的圆锥形水槽中，问当水深为 6 米时，水位的上升速度是多少？
案例 3　求方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=c\sin t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 所确定的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 的值，再求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$
案例 4 求由方程 $x+y-e^{2x}+e^{y}=0$ 确定的隐函数的导数</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 导数的四则运算 复合函数求导数法则 反函数求导法则 隐函数求导法则 对数求导法则 参数方程求导法则	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	导数的四则运算 （1）学生阅读教材 47 页内容 （2）学生总结导数如何四则运算 （3）$\left(u(x)\pm v(x)\right)' = u'(x)\pm v'(x)$ $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + \mathrm{u(x)v'(x)}$ $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ 例 $y = 2x^3 + x^2 + 1$, 求 y' 例 $y = xe^x + 2x$，求 y' 例 $y = \log_a x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 例 $y = e^x \sin x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 例 $y = \sqrt{x}\cos 4x + 4\ln x + \sin\dfrac{\pi}{7}$， 求 y'	教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨	45 分钟
3 （任务 2）	复合函数求导数 （1)学生阅读 49 页内容总结如何求复合函数的导数 （2）设 $\mathrm{y} = f[\varphi(\mathrm{x})]$，则分解成 $y = f(u), u = \varphi(x)$。所以 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$	教师启发讲解	板书	师生研讨	45 分钟

	（3）例 $y=\sin\sqrt{x}$，求 y' 例 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，求 y' 例 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$，求 y' 例 $y=\sin\ln\sqrt{2x+1}$，求 y' 例 假设气体以 100 立方厘米/秒的速度注入气球，假定气体的压力不变，那么当半径是 10 厘米时，气球半径增加的速率是多少？				
4 （任务 3）	反函数求导 （1）学生阅读 52-53 页，总结反函数求导的办法 （2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ 例 根据 $x=\log_a y$ 的导数，求 $y=a^x$ 的导数 例 根据 $x=\sin y$ 的导数求 $y=\arcsin x$ 的导数 例 $y=\arctan x$，求 y' 例 $y=\arcsin\sqrt{x}$，求 y'	教师启发讲解	板书	师生研讨	45 分钟
5 （任务 4）	隐函数求导法 （1)学生阅读 55 页内容总结隐函数求导法则 （2）方程两侧对 x 求导，遇到含有 y 的项，先对 y 求导，再对 x 求到，这样得到一个含有 y' 的式子，求出 y' 即可 例 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定的隐函数的导数 y'	学生分组自主学习法	教师提示	学生讨论	45 分钟

	例　设曲线 $3y^2=x^2(x+1)$，求在 $\left(2,2\right)$ 处的切线斜率和切线方程 例　求由方程 $\sin x+\sin y-xy=2$ 确定的隐函数的导数 y'。 例　求由方程 $x-\dfrac{y}{x}+\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin y}=6$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$				
6 （任务5）	对数求导法则 （1）学生阅读 56 页内容总结对数求导法则 （2）对数求导事实上是把一些通过乘除乘方开方构成的复杂函数转化成隐函数，然后再运用隐函数求导法则求出导数 例　$y=(\mathrm{x}-1)\sqrt[3]{(3\mathrm{x}+1)^2(\mathrm{x}-2)}$，求 y' 例　$y=x^{\sin x}$，求 y' 例　$y=x^{x^x}$，求 y' 例　$y=\dfrac{x-1}{(x+2)^{10}}\dfrac{(x+1)^{11}}{(2x-8)^{21}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$	学生分组自主学习法	教师提示	学生讨论	45 分钟
7 （任务6）	参数方程求导 （1）学生阅读 57 页总结参数方程求导法 （2）设参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\Psi(t)\end{cases}$ 则 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 例　设参数方程 $\begin{cases}x=v_1t\\y=v_2t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$，求 y'	学生分组自主学习法	教师提示	学生讨论	45 分钟

	例 设 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$，求 y'				
8（案例）	案例应用 案例 1 $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x \sin x}{1 + \cos x}$，求 $f'(x)$，$f''(x)$ 案例 2 若水以 2 立方米/分的速度灌入一个高为 10 米的、底面半径是 5 米的圆锥形水槽中，问当水深为 6 米时，水位的上升速度是多少？ 案例 3 求方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 所确定的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 的值，再求二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 案例 4 求由方程 $x + y - e^{2x} + e^{y} = 0$ 确定的隐函数的导数	学生自行讨论解决			50 分钟
作业	59 页 1 2 3 4 5 6				
课后体会					

3.3 微分 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	微分	单元教学学时	4
		在整体设计中的位置	第 21、22 次
授课班级		上课地点	

<table>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td>①能够掌握微分的概念
②能够掌握微分和导数的关系及公式表达
③微分在近似计算公式中的应用</td><td>微分概念
微分公式
微分近似计算公式</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="3">任务 1　微分的概念及公式表达
任务 2　微分的近似计算
案例 1（机械零件加工）　有一个球体机械加工零件，要使他的体积从 972π立方厘米增加到 973π立方厘米，试估计其半径的增加了月多少？
案例 2（机械零件近似）　有一个机械零件长是$\sqrt[3]{65}$，现在要加工边长，但是不知道将具体近似值，请计算出来。
案例 3　求 $y=(3x-1)^{100}$ 的微分。并计算 $f(2)$ 的近似值</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

<table>
<tr><th>步骤</th><th>教学内容</th><th>教学方法</th><th>教学手段</th><th>学生活动</th><th>时间分配</th></tr>
<tr><td>1
（告知）</td><td>本单元学习目标：
掌握微分的概念
掌握微分和导数的关系及公式表达
微分在近似计算公式中的应用</td><td>陈述</td><td>板书</td><td>识记</td><td>5 分钟</td></tr>
<tr><td>2
（引入任务 1）</td><td>微分概念
（1）学生阅读 60-61 页资料，理解微分的含义
（2）所谓的微分，就是随着自变量的改变量 Δx，函数值的该变量 Δy。$\Delta y = f'(x)\Delta x$，也即
$dy = f'(x)dx$
例 计算下列函数的微分
（1） $y = x^8 + 6x^2 + 1$
（2） $y = e^x + 2\sin x$
（3） $y = \sin\sqrt{x}$
（4） $x^2 + xy - \sin y = 0$
例 $y = \arctan x$，求 dy
例 $y = \arcsin\sqrt{x}$，求 dy
微分和导数比较：
<table>
<tr><th>导 数 公 式</th><th>微 分 公 式</th></tr>
<tr><td>$(\tan x)' = \sec^2 x$</td><td>$d(\tan x) = \sec^2 x dx$</td></tr>
<tr><td>$(\cot x)' = -\csc^2 x$</td><td>$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$</td></tr>
<tr><td>$(\sec x)' = \sec x \tan x$</td><td>$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$</td></tr>
<tr><td>$(\csc x)' = -\csc x \cot x$</td><td>$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$</td></tr>
<tr><td>$(a^x)' = a^x \ln a$</td><td>$d(a^x) = a^x \ln a dx$</td></tr>
<tr><td>$(e^x)' = e^x$</td><td>$d(e^x) = e^x dx$</td></tr>
<tr><td>$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$</td><td>$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$</td></tr>
<tr><td>$(\ln x)' = \frac{1}{x}$</td><td>$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$</td></tr>
<tr><td>$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$</td></tr>
<tr><td>$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$</td></tr>
<tr><td>$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$</td><td>$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$</td></tr>
<tr><td>$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$</td><td>$d(\text{arccot } x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$</td></tr>
</table>
</td><td>教师讲解</td><td>教 师提示</td><td>学生认真听讲分组研讨</td><td>40 分钟</td></tr>
</table>

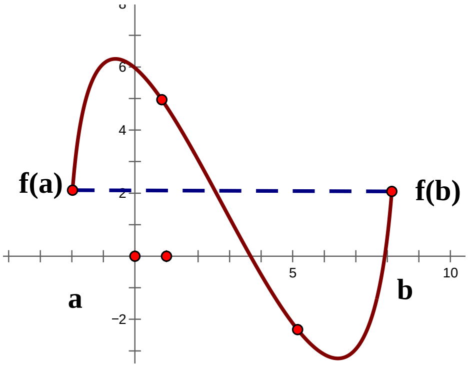
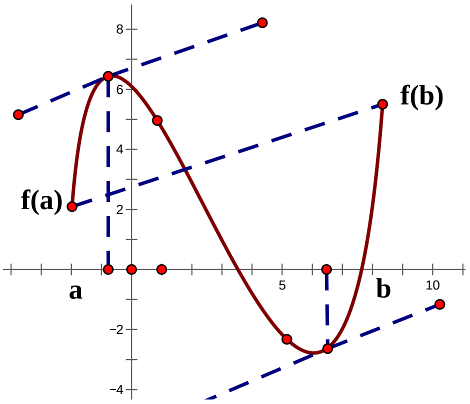
3 （任务2）	微分的近似计算 学生总结近似计算 （1）首先要搞清楚设计的关系式，自变量和因变量 （2）$\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 例 假设一机械正方形薄片，边长是 x 厘米，现在机械薄片边长从 $x=2$ 增加到 $x=2.2$，求薄片面积的增加。设 s=x^2 是薄片面积，则 $\Delta s = s'(2)0.2$ =0.8 平方厘米 例（膨胀问题） 设一个铜质正方体，边长是 20 厘米，因为热胀冷缩，到了夏天，经测量他的边长有 20 厘米增加了 0.1 厘米，试问这个铜质正方体的体积膨胀了多少？	教师启发讲解	板书	师生研讨	40 分钟
4 （任务3）	案例应用 案例 1　有一个球体机械加工零件，要使他的体积从 972π 立方厘米增加到 973π 立方厘米，试估计其半径的增加了月多少？ 案例 2　有一个机械零件长是 $\sqrt[3]{65}$，现在要加工边长，但是不知道将具体近似值，请计算出来。 案例 3 求 $y=(3x-1)^{100}$ 的微分。并计算 $f(2)$ 的近似值	教师启发讲解	板书	师生研讨	40 分钟
作业	66 页 3　4				
课后体会					

4.1 微分中值定理 单元教学设计

一、教案头

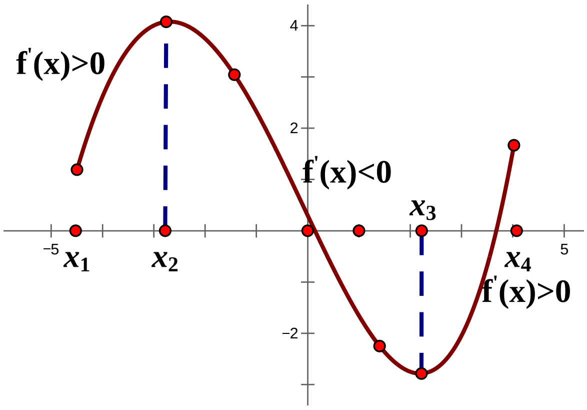
<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">微分中值定理</td><td colspan="2">单元教学学时</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">在整体设计中的位置</td><td>第 23-26 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够理解和掌握罗尔定理
②能够掌握拉格朗日定理并证明相关问题
③能够掌握导数判断函数的单调性
④能够掌握柯西中值定理及洛比达法则</td><td>洛尔定理、拉格朗日定理
单调性、柯西定理、洛比达法则</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1 罗尔定理
任务 2 拉格朗日定理
任务 3 单调性
任务 4 柯西定理与洛比达法则
案例 1 求 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ 的单调区间
案例 2 讨论 $y=e^{-x^2}$ 的单调性
案例 3 计算 $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$
案例 4 设 f(x)在[0,1]上连续，在（0,1）内可导，且 f(1)=0,试证：至少存在一个点 ζ，使得 $f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$
案例 5 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得
$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$
案例 6 若 $a>0,b>0$ 均为常数，求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学 湖南省教科所组编 高等教育出版社
高等数学及应用 吕同富主编 高等教育出版社
高等数学应用 205 例 李心灿主编 高等教育出版社
高等数学（第四版） 同济大学等编 高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 洛尔定理 拉格朗日定理 单调性 柯西定理 洛比达法则	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	洛尔定理 学生阅读 73 页，理解罗尔定理。教师黑板画图像：  根据图像寻找点，结合导数的几何意义，寻找 $f'(\zeta)=0$ 经过讨论：原来这个 ζ 点就是最高点或者最低点。 例： 设 $f(x)=x\sqrt{3-x}$，验证符合洛尔定理。 练习：设 $f(x)=2x^2-x-3, x\in[-1,1.5]$ 验证符合洛尔定理。	教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨	30 分钟
3 （任务 2）	拉格朗日定理 学生阅读 70 页教材，结合下面的图像：  分析拉格朗日定理的成立理由	教师启发讲解	板书	师生研讨	40 分钟

<table>
<tr>
<td></td>
<td>例 研究 $y=x^2$ 在区间[1,2]上满足拉格朗日定理

证明：如果 $f(x)$ 在区间[a,b]内满足 $f'(x)=0$，则在[a,b]内 f(x)是个常数。

练习：证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4
（任务
3）</td>
<td>单调性
学生阅读 72 页内容，总结单调性与导数有何关系。


总结：（1）如果 $f(x)$ 在[a,b]内的导数 $f'(x)>0$，那么 f(x)在这个区间内单调增加
（2）如果 $f(x)$ 在[a,b]内的导数 $f'(x)<0$，那么 f(x)在这个区间内单调减少
要研究函数的单调区间步骤
（1）求驻点
（2）以驻点分开定义域为若干块，在每块内探讨一阶导数的正负。正的单调增加，负则单调减少。

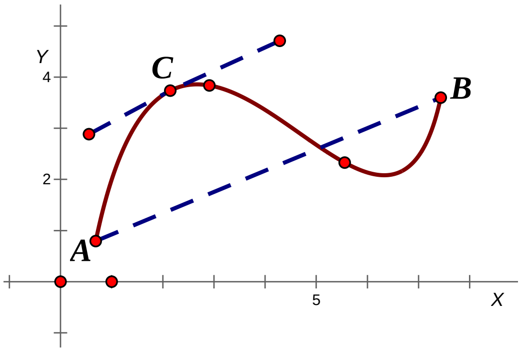
例：研究 $y=x^4$ 的单调区间

例：研究 $y=3x^3-x^2$ 的单调区间

练习：证明，$x>0$时，$e^x>x$</td>
<td>教师
启发
讲解</td>
<td>板书</td>
<td>师　生
研讨</td>
<td>60 分
钟</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>5
（任务4）</td>
<td>

柯西定理与洛比达法则



柯西定理是前面两个定理的推广，学生了解即可。他的证明是把两个函数看成参数方程

$\begin{cases} X = F(x) \\ Y = \mathrm{f}(x) \end{cases}$，$A(F(a), f(a))$，$B(F(b), f(b))$，连接 AB

的连线的斜率是 $\dfrac{f(b) - f(a)}{F(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})}$，在曲线上必有一个点 C，

它的切线斜率是 $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \dfrac{f'(\zeta)}{\mathrm{F}'(\zeta)}$

柯西定理的一个主要应用就是证明罗比达法则：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(y)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{\mathrm{g}'(\mathrm{x}_0)} = A$$

例 计算 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

例 计算 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{\tan x}$

例 计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$

例 计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$

练习 计算 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

计算 $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\ln \cot x}{\tan x}$ 计算 $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\ln \cot x}{\tan x}$

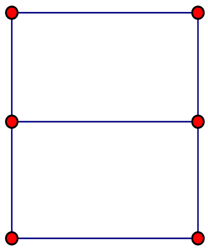
</td>
<td>教师启发讲解</td>
<td>板书</td>
<td>师 生研讨</td>
<td>60 分钟</td>
</tr>
</table>

6 （案例）	案例 1　求 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ 的单调区间 案例 2　讨论 $y=e^{-x^2}$ 的单调性 案例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi - \mathrm{x})}{\pi - \mathrm{x}}$ 案例 4 设 f(x)在[0,1]上连续，在（0,1）内可导，且 f(1)=0,试证：至少存在一个点 ζ ，使得 $f'(\xi)=-\frac{2\mathrm{f}(\xi)}{\xi}$ 案例 5 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$ 案例 6 若 $a>0,b>0$ 均为常数，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$	学生讨论学习			60 分钟
作业	77 页 1 2 3 4				
课后体会					

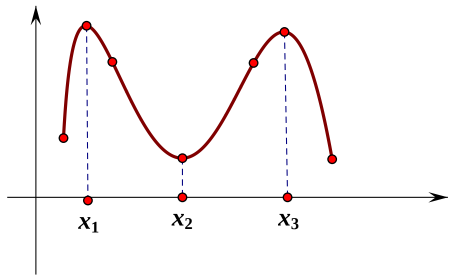
4.2 函数的极值和最值 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	函数的极值和最值	单元教学学时	8
		在整体设计中的位置	第 27-30 次
授课班级		上课地点	
教	能力目标	知识目标	素质目标

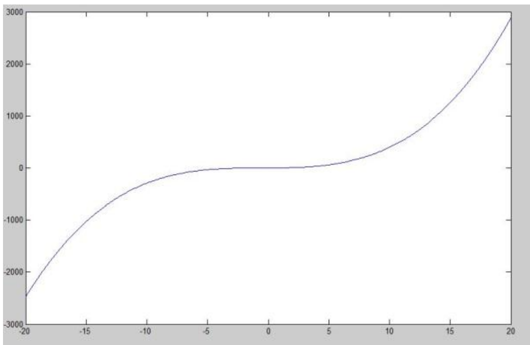
<table>
<tr><td>学
目
标</td><td>①能够极值和最值的概念和区别
②能够求解函数的极值和最值</td><td>单调性
极值
最值
求法</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能
力
训
练
任
务
及
案
例</td><td colspan="3">任务 1　　函数的极值定理及其求解
任务 2　　函数的最值及其求解
案例 1　求 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ 的极值
案例 2　讨论 $y=e^{-x^2}$ 的极值
案例 3（最大流量出口）　有一块宽为 2a 的长方形铁皮，将宽的两个边缘向上折起，做成一个开口水槽，其横截面积为矩形，高为 x，问高 x 取和值时水槽的流量最大？
案例 4 （铁路站点安置） 铁路线 AB 距离为 100 公里，工厂 C 距 A 为 20 公里，AC 垂直于 AB，今要在 AB 上选定一个点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路与公路每公里货运费之比是 3:5，问 D 点选在何处才能使从 B 到 C 的运费最少？
案例 5 （最大面积问题） 现在用一张铝合金材料加工一个日字型窗框，问它的长和宽分别为多少时，才能是窗户的面积最大，最大面积是多少？如下图
</td></tr>
<tr><td>教
学
材
料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

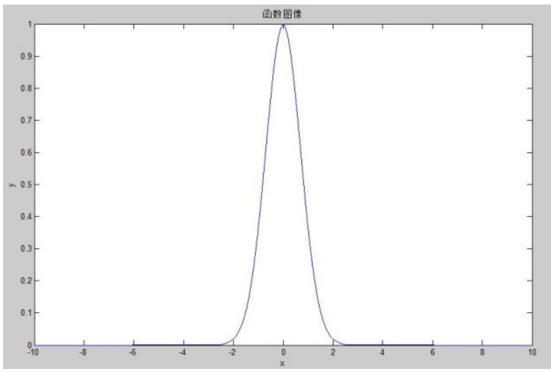
二、教学设计

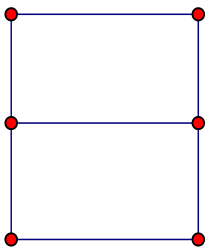
<table>
<tr><th>步骤</th><th>教学内容</th><th>教学方法</th><th>教学手段</th><th>学生活动</th><th>时间分配</th></tr>
<tr><td>1
（告知）</td><td>本单元学习目标：
极值
最值</td><td>陈述</td><td>板书</td><td>识记</td><td>5 分钟</td></tr>
<tr><td>2
（引入任务 1）</td><td>极值
学生阅读 77 页内容，搞清楚：
（1）极值点的定义
（2）求解极值点的方法
定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内都有 $f(x) < \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$，则称 x_0 是极大点，$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ 为极大值。设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内都有 $f(x) > \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$，则称 x_0 是极小点，$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ 为极小值。
如下图


x_1, x_3 是极大点，x_2 是极小点
判断一个点 x_0 的极大点或者极小点有两种方法
1、根据 x_0 两侧的 $f'(x)$ 的符号来判定
<table>
<tr><td>x_0 左侧</td><td>x_0</td><td>x_0 右侧</td></tr>
<tr><td>$f'(x) < 0$</td><td>极小点</td><td>$f'(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>$f'(x) > 0$</td><td>极大点</td><td>$f'(x) < 0$</td></tr>
<tr><td>$f'(x) > 0$</td><td>不是极值点</td><td>$f'(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>$f'(x) < 0$</td><td>不是极值点</td><td>$f'(x) < 0$</td></tr>
</table>
</td><td>教师讲解</td><td>教师提示</td><td>学生认真听讲分组研讨</td><td>50 分钟</td></tr>
</table>

	例 求函数 $y=1-x^2$ 的极值点和极值 练习：求函数 $y=2+(1-x)^2$ 的极值点和极值 2、根据二阶导数 $f''(x)$ 的符号来确定 设 x_0 是驻点，如果 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是极小点；如果 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是极大点；$f''(x_0)=0$，则 x_0 是无法判断 x_0 是极大点还是极小点。 例 求函数 $y=x^3-6x^2+9x$ 的极值 例 求函数 $y=2-(\mathrm{x}-1)^{\frac{3}{2}}$ 的极值				
3 （任务2）	函数的最值 学生阅读教材 79 页，总结求最值的办法以及极值和最值的区别。 求解最大值和最小值的办法： （1）求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一切驻点和一阶导数不存在的点，并计算个点的函数值（此时不必判断是极大值点还是极小值点） （2）求出端点 $f(a),f(b)$ （3）比较前面求出的所有函数值，最大的就是最大值，最小的就是最小值。 例 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ 在[-3,4]上的最值 解：$f'(x)=6x^2+6x-12=0$，得 $x=-2,x=1$。所以 $f(-2)=20,f(1)=-7,\mathrm{f}(-3)=9,\mathrm{f}(4)=128$。所以最大值点是 4，最大值是 128；最小值点是 1，最小值是-7. 练习：求函数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$ 在[-3,3]上的最值 参考图像	教师启发讲解	板书	师 生研讨	40 分钟

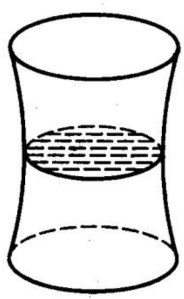
<table>
<tr>
<td>4
（案例）</td>
<td>案例应用
案例 1　求 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ 的极值


案例 2　讨论 $y=e^{-x^2}$ 的极值


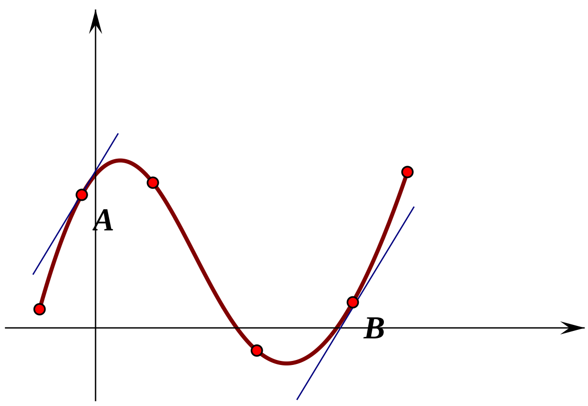
案例 3　有一块宽为 2a 的长方形铁皮，将宽的两个边缘向上折起，做成一个开口水槽，其横截面积为矩形，高为 x,问高 x 取和值时水槽的流量最大？
案例 4　铁路线 AB 距离为 100 公里，工厂 C 距 A 为 20 公里，AC 垂直于 AB，今要在 AB 上选定一个点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路与公路每公里货运费之比是 3:5，问 D 点选在何处才能使从 B 到 C 的运费最少？
案例 5　现在用一张铝合金材料加工一个日字型窗框，问它的长和宽分别为多少时，才能是窗户的面积最大，最大面积是多少？如下图
</td>
<td>学生讨论学习</td>
<td>数学软件演示图像</td>
<td></td>
<td>60 分钟</td>
</tr>
<tr>
<td>作业</td>
<td colspan="5">80 页 1 2 3</td>
</tr>
</table>

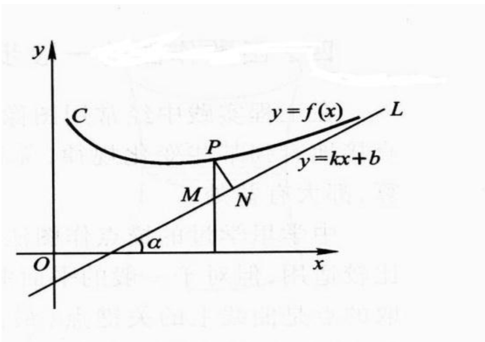
4.3 函数图像的描绘 单元教学设计

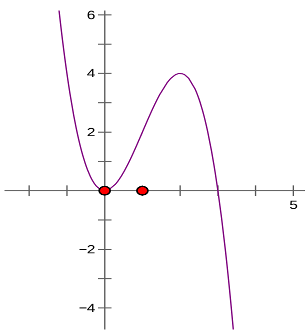
一、教案头

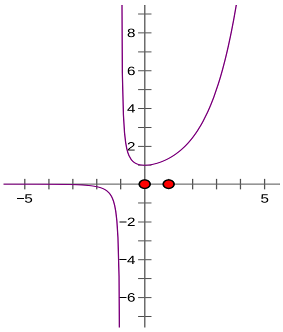
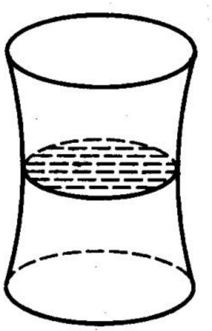
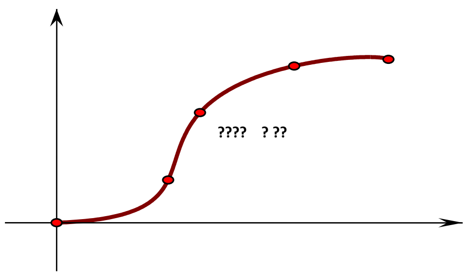
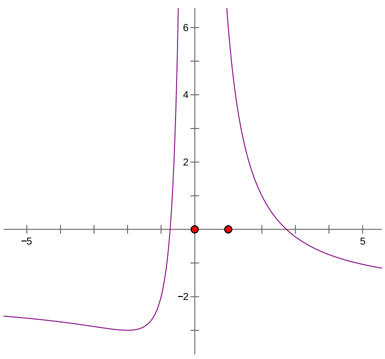
<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">函数图像的描绘</td><td>单元教学学时</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td colspan="2">第 31-34 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td>上课地点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td colspan="2">知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握函数的凸凹性及拐点
②能够求解函数渐进线
③能够按照步骤画出复杂函数的图像</td><td colspan="2">凸凹性
拐点
渐进线
函数的图像</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　函数的凸凹性和拐点
任务 2　函数的渐近线.
任务 3　按步骤描绘函数图像
案例 1（注水曲线凸凹）　设水以常数 $am^3/s, a>0$ 注入下图的容器中，请做出水上升的高度关于时间 t 的函数 $y = f(t)$，并阐明此函数的拐点和凸凹性。

案例 2 描绘函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图像。
案例 3（最值问题） 要用铁皮造一个容积为 V 的圆柱形闭合油罐，问底半径 r 和高 h 等于多少时，能使所使用的铁皮最省？这时候的半径 r 和高 h 的比值是多少？
案例 4（最值问题） 要建造一个上面是半球形，下面是圆柱形的粮仓，其容积是 V，问当圆柱体的高 h 和底半径 r 为何值时，粮仓所使用的建筑材料最省？</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 凸凹性 拐点 渐近线 描绘函数图像	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	凸凹性 学生阅读 83 页，理解凸凹性。如下面函数图像  观察图像，发现函数的图像有的在其上的点的切线下方（下凹），有时函数的图像有的在其上的点的切线上方（上凹）。例如 A 点，图像在过 A 点的切线下方，那么 A 点周围的函数图像就是下凹。例如 B 点，图像在过 B 点的切线上方，那么 B 点周围的函数图像就是上凹。 关于凸凹性有重要的定理： 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数。那么 （1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线在 (a,b) 内上凹。 （2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线在 (a,b) 内下凹。 拐点 如果点 P 的两侧，函数的凹向性不一样，那么这样的点 P 叫做函数的拐点。因此拐点就是使得 $f''(x)=0$ 或者二阶导数不存在的点。 例 求曲线 $y=x^3$ 的凸凹性与拐点。	教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨	30 分钟

	例 判定函数$y=\ln x$的凸凹性 例 求函数$y=\dfrac{e^x}{1+x}$的拐点。				
3 （任务2）	渐近线 （1）斜渐近线 若$f(x)$满足：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[\mathrm{f(x)-kx}]=\mathrm{b}$ 则曲线$y=f(x)$有渐近线$y=kx+b$ 如下图：  例 求曲线$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的斜渐近线 例 求曲线$y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$的斜渐近线 （2）垂直渐近线 如 果 $x\to C$（ 或 者 $x\to C^+$ 或 者 $x\to C^-$ ）时 ， $f(x)\to\infty$。则$x=C$是$f(x)$的垂直渐近线 例 求$y=\dfrac{1}{x-5}$的垂直渐近线 例 求曲线$y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$的垂直渐近线 （3）水平渐进线 如 果 $x\to\infty$（ 或 者 $x\to+\infty$ 或 者 $x\to-\infty$ ）时 ， $f(x)\to C$。则$y=C$是函数的水平渐近线 例 求$y=e^{-x^2}$的水平渐近线	教师启发讲解	板书	师 生研讨	60分钟

	例 求曲线 $y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$ 的水平渐近线 例 求曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线。 例 求 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线 例 求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线				
4 （任务3）	描绘函数图像 学生阅读 86 页，总结描绘函数图像的步骤： （1） 确定函数的定义域 （2） 考察函数的周期性和奇偶性 （3） 确定函数的单调区间、极值点、凸凹性、拐点、考察 （4） 考察函数的曲线的渐进线 （5） 考察函数曲线与坐标轴的交点 最后画出图像 例 描绘函数 $y=3x^2-x^3$ 的图像 （1）定义域 $(-\infty,+\infty)$ （2）函数不具备周期性和奇偶性 （3）令 $y=0$ 得 $x=0,x=3$ 表明函数与 x 轴有两个交点，一个是 0，一个是 3. （4） $y'=3x(2-x)$ 得驻点 0，2. 用二阶导数判定，x=0 是极小点，极小值 f(0)=0，x=2 是极大点，极大值 f(2)=4 (5) $y''=6(1-x)$，拐点 x=1，在 1 的左侧 $y''>0$，上凹；在 1 的右侧，$y''<0$，下凹 （6）无渐近线 作图如下： 	教师启发讲解	板书	师 生研讨	60 分钟

	例　画出 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ 的图像。参考图像 				
5 （案例）	案例应用 案例 1　设水以常数 $am^3/s, a>0$ 注入下图的容器中，请做出水上升的高度关于时间 t 的函数 $y=f(t)$，并阐明此函数的拐点和凸凹性。  参考图像  案例 2 描绘函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图像。 	学生讨论	数学软件演示		60 分钟

	案例 3 要用铁皮造一个容积为 V 的圆柱形闭合油罐，问底半径 r 和高 h 等于多少时，能使所使用的铁皮最省？这时候的半径 r 和高 h 的比值是多少？ 案例 4 要建造一个上面是半球形，下面是圆柱形的粮仓，其容积是 V，问当圆柱体的高 h 和底半径 r 为何值时，粮仓所使用的建筑材料最省？				
作业	87 页 3 4				
课后体会					

5.1 不定积分概念 单元教学设计

一、教案头

单元标题：	不定积分概念	单元教学学时	4
		在整体设计中的位置	第 1 次
授课班级		上课地点	

<table>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td>①能够掌握原函数并熟练应用
②能够利用概念求解不定积分
③能够掌握不定积分的性质</td><td>原函数
不定积分
不定积分的性质</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="3">任务 1　原函数
任务 2　不定积分概念
任务 3　基本初等函数不定积分公式
任务 4　不定积分性质定
案例 1　已知曲线 $y=f(x)$ 过点（0, 0），且在点 (x,y) 处的切线斜率是 $k=3x^2+1$，求该曲线的方程。
案例 2　$y=f(x)$ 的一个原函数是 cosx, 则 $\int f'(x)dx$ 为何？
案例 3 $\int f(x)dx=xe^x+C$，求 $f(x)$
案例 4 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$
案例 5 设某机械物体以速度 $v=3t^2$ 做直线运动，当 $t=0$ 时 $s=2$，求运动规律 $s=s(t)$</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="3">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 原函数 不定积分 不定积分的性质	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	原函数 学生阅读 95 页内容，总结原函数。 如果 $F'(x)=f(x)$ 或者 $dF(x)=f(x)\mathrm{dx}$ ，那么 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。 例如 $\left(\sin x\right)'=\cos x$，则 sinx 是 cosx 的原函数。 例如 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，则 $\frac{1}{x}$ 是 $-\frac{1}{x^2}$ 的原函数 例如 $\left(\sin x+C\right)'=\cos x$，则 sinx+C 是 cosx 的原函数 也就是说 cosx 的原函数是一族函数 sinx+C；反过来所有的 sinx+C 都是 cosx 的原函数。因此有下面的定理： 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么 $F(x)$+C 是 $f(x)$ 的全部原函数，或者说 $f(x)$ 的全部原函数是 $F(x)$+C。 例 求 $f(x)=\mathrm{x}^5$ 的全部原函数 解：因为 $\left(\frac{x^6}{6}\right)'=x^5$，所以 x^5 的全部原函数是 $\frac{x^6}{6}+C$ 例 求 $f(x)=\sin 3\mathrm{x}$ 的全部原函数 例 求 $f(x)=\sqrt{\mathrm{x}^5}$ 的全部原函数	学生阅读 教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨	30 分钟
3 （任务 2）	不定积分 学生阅读 96 页内容，理解不定积分 $f(x)$ 的全部原函数 $F(x)$+C 叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx=F(x)+C$	学生阅读 教师启发讲解	板书	师生研讨	40 钟

	例 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x + C$ 例 $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$ 例 $\int \sin x dx = \cos x + C$ 例 $\int \cos x dx = -\sin x + C$ 例 求过点(1,2)且斜率是 2x 的曲线方程				
4（任务3）	基本初等函数不定积分运算公式 通过对初等函数，利用不定积分运算，得到下面的基本初等函数的不定积分运算公式，供以后参考： （1）$\int k dx = kx + C$ (2) $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$, (3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$, (4) $\int e^x dx = e^x + C$, (5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, (6) $\int \cos x dx = \sin x + C$, (7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, (8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$, (9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, (10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$, (11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$, (12) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$, (13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.	教师启发讲解	板书	师 生研讨	60分钟

<table>
<tr><td>5
任务 4</td><td>不定积分的性质
学生阅读 98 页，理解不定积分性质。
（1）$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
（2）$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int\ g(x)dx$
例 $\int (e^x + 2^x)dx = \int e^x dx + \int 2^x dx = e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$
例 求下列不定积分
（1）$\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
（2）$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$
（3）$\int (2\sin x + 3\cos x)dx$
下面是个复杂题，教师提示，学生解答：
（1）$\int \frac{1+x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$ （2）$\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$</td><td>教师
启发
讲解</td><td>板书</td><td>师 生
研讨</td><td>40 分
钟</td></tr>
<tr><td>6
案例
训练</td><td>案例 1 已知曲线 $y = f(x)$ 过点（0,0），且在点 (x,y) 处的切线斜率是 $k = 3x^2 + 1$，求该曲线的方程。
案例 2 $y = f(x)$ 的一个原函数是 cosx,则 $\int f'(x)dx$ 为何？
案例 3 $\int f(x)dx = xe^x + C$，求 $f(x)$
案例 4 $f'\left(\cos^2 x\right) = \sin^2 x$，且 $f(0) = 0$，求 $f(x)$
案例 5 设某机械物体以速度 $v = 3t^2$ 做直线运动，当 $t = 0$ 时 $s = 2$，求运动规律 $s = s(t)$</td><td>学生
思考
教师
提示</td><td></td><td></td><td>50 分
钟</td></tr>
<tr><td>作业</td><td colspan="5">100 页 2、（1）-（6）</td></tr>
<tr><td>课后
体会</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

5.2 不定积分的积分方法 单元教学设计

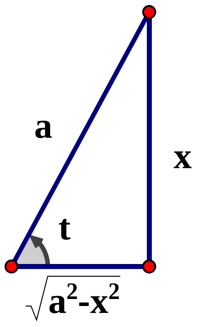
一、教案头

<table>
<tr><td rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2" colspan="2">不定积分的积分方法</td><td>单元教学学时</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td colspan="2">第 3-8 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td colspan="2"></td><td>上课地点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td colspan="2">知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握凑微分法求不定积分
②能够掌握换元法求不定积分
③能够掌握分部积分法
④能够掌握简单有理函数的不定积分</td><td colspan="2">凑微分法
换元法
分部积分法
简单有理函数的不定积分</td><td>①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　凑微分法不定积分
任务 2　换元法不定积分
任务 3　分部积分法
任务 4　简单有理函数不定积分
案例 1　$\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$
案例 2　$\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$
案例 3　$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$
案例 4　设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\int \varphi(x)dx$
案例 5　设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$，计算 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$。提示:用到反三角函数。</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1（告知）	本单元学习目标： 凑微分法 换元法 分部积分法 简单有理函数的不定积分	陈述	板书	识记	10 分钟
2（引入任务 1）	凑微分 学生阅读 100 页内容，总结凑微分方法。 （1）把被积函数的一部分，利用微分，转移到 d 的后面，形成某函数的微分 （2）d 后面的微分正好与被积函数剩下的部分有相同的关系，然后把它们看成一个整体，利用基本初等函数公式求得。 （3）前面的转移到 d 后面的函数被看做一个整体，其实也是换元法，所以凑微分又叫第一换元法。 例 求 $\int\cos^2 x\sin xdx$ 第一步：注意到 sinx,它转移到 d 后面称为 dcosx。因为根据微分的知识 dcosx=sinxdx。这样不定积分变成了 $\int\cos^2 xd\cos x$ 第二步：把 cosx 看成一个整体，可以令 t=cosx，则不定积分变成了 $\int t^2dt$ 。根据基本初等函数不定积分公式有 $\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$ 第三步：再把 t 换回 cosx，于是原来的不定积分等于 $\int\cos^2 x\sin xdx=\int\cos^2 xd\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ 。解答完毕。 以上就是凑微分的全过程，注意，不必把中间的代换过程写出来。 用凑微分法计算下列不定积分 （1）$\int(2x+1)^{100}dx$（2）$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ （3）$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 凑微分运用时的难点在于原题并未指明把哪一部分凑成 $d\varphi(x)$，这需要解题经验，多做练习，做熟悉。例如下面的公式常用	学生阅读 教师讲解	教师提示	学生认真听讲 分组研讨	60 分钟

	$dx=\frac{1}{a}d(\mathrm{ax}+\mathrm{b})$ $\quad xdx=\frac{1}{2}dx^2$ $\quad \sqrt{x}dx=2d\sqrt{x}$ $e^x dx=de^x$ $\quad \frac{1}{x}dx=d\ln\|\mathrm{x}\|$ $\quad \sin xdx=-d\cos x$ 练习：（1）$\int x\sqrt{1-x^2}dx$ （2）$\int xe^{-x^2}dx$ (3) $\int \tan xdx$				
3（任务2）	换元法 学生阅读 104 页内容，理解不定积分换元法 不定积分的换元法种类大题有两类种，一种是消掉根号的模式，另一种是三角函数换元。 （1）消掉根号 例 $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ 为了消掉根号，令$\sqrt{x}=t$，这样$x=t^2$，$dx=2tdt$，于是原来的不定积分变成了： $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t^2dt}{1+t}=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$ $=t^2-2t+2\ln\|1+\mathrm{t}\|+\mathrm{C}$ 练习：（1）$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$ （2）$\int\frac{dx}{1+\sqrt{3-x}}$ （2）三角函数换元 例 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ 本例要是直接代换根号，做不出来，必须另寻其他途径。令$x=a\sin t$，$dx=a\cos tdt$，代入原来的不定积分得： $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos ta\cos tdt=a^2\int\cos^2 dt$ $=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^3}{2}(t+\sin t\cos t)+C$	学生阅读教师启发讲解	板书	师 生研讨	90 钟

	下面利用直角三角形把 t 转换成 x。首先根据代换公式 $x = a\sin t$，得 $\sin t = \frac{x}{a}$，做角度是 t 的直角三角形  所以 $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ 所以，最后所求的不定积分是 $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$ 三角代换常用还有 cosx, tanx 等 练习：（1）$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}(a > 0)$ （2）$\int\frac{x^2dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$				
4（任务3）	分部积分法 学生阅读 106-107 页，理解分部积分法。 公式：$\int udv = uv - \int vdu$ 分布积分前面一部分其实是凑微分，后面才利用上面的分部积分公式。 例 $\int x\cos xdx$ 解：$\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int\sin xdx$ $= x\sin x + \cos x + C$ 例 $\int x\ln xdx$ $\int x\ln xdx = \int\ln xd\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{x^2}{2}d\ln x$ $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$	教师启发讲解	板书	师 生研讨	60 分钟

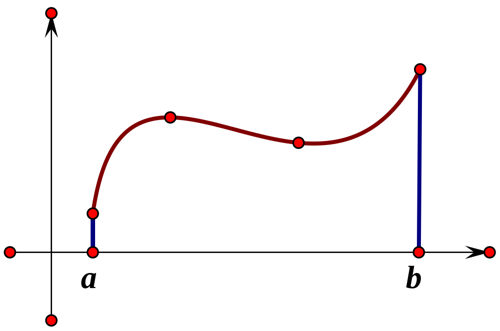
	练习：（1）$\int e^{x}\sin xdx$ （2）$\int \arctan\sqrt{x}dx$ （3）$\int \ln xdx$				
5 任务 4	简单有理函数不定积分 学生阅读 109-110 页内容，理解简单有理函数不定积分的三种情况。 分子分布都是多项式函数的不定积分，叫做简单有理函数不定积分。例如$\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$。总的说，这类不定积分就是想办法把被积函数分解开成，然后分别积分。 例 $\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$ 解：因为$\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}$ 所以$\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{2}{(x-1)^2}dx$ $=\ln\lvert x\rvert-\frac{2}{x-1}+C$ 例 $\int \frac{x^2}{(1+2x)(1+\mathrm{x}^2)}dx$ 解：先令$\frac{x^2}{(1+2\mathrm{x})(1+\mathrm{x}^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，然后得$A=\frac{1}{5},B=\frac{2}{5},C=-\frac{1}{5}$。这样就把被积函数分解了，然后一个一个积分。 $\int \frac{x^2}{(1+2x)(1+\mathrm{x}^2)}dx=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+2x}+\frac{1}{5}\int \frac{2x-1}{1+x^2}dx$ $=\frac{1}{10}\ln\lvert 1+2x\rvert+\frac{1}{5}\ln\lvert 1+x^2\rvert-\frac{1}{5}\arctan x+C$ 练习：（1）$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$（2）$\int \frac{x+4}{x^2+2x-3}dx$ 注意：理论上所有的有理函数都是能够积分的，但是大部分计算起来很麻烦。	教师 启发 讲解	板书	师 生 研讨	50 分 钟

<table>
<tr><td>6
案例
训练</td><td>案例操练
案例 1 $\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$
案例 2 $\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$
案例 3 $\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$
案例 4 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$
案例 5 设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$，计算 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$。提示:用到反三角函数</td><td>学生
思考
教师
提示</td><td></td><td></td><td>50 分
钟</td></tr>
<tr><td>作业</td><td colspan="5">113 页 2、（1）-（3）
5、（1）-（4）
6、（1）-（4）
7、
8、</td></tr>
<tr><td>课后
体会</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

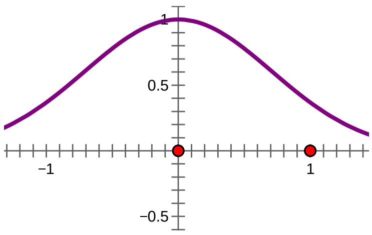
一、教案头

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">单元标题：</td><td rowspan="2">定积分的概念与微积分基本公式</td><td colspan="2">单元教学学时</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">在整体设计中的位置</td><td>第 9-12 次</td></tr>
<tr><td colspan="2">授课班级</td><td></td><td colspan="2">上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握曲边梯形面积的求解思路和办法
②能够掌握定积分的概念与基本性质
③能够掌握微积分基本公式的内容和证明
④能够利用微积分基本公式求解一些简单初步的定积分</td><td>曲边梯形面积
定积分的概念与基本性质
微积分基本公式求解简单
定积分</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　曲边梯形面积
任务 2　定积分概念
任务 3　微积分基本公式
任务 4　简单定积分计算
案例 1（面积估计）　利用曲边梯形面积估计值，估计 $\int_{-1}^{1}(4x^4-2x^3+5)\mathrm{dx}$
案例 2　计算变上限定积分 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}$
案例 3　已知 $\Phi(x)=\int_1^x \sin\sqrt{t}dt$，求 $\Phi'(x)$。</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 曲边梯形面积 定积分的概念与基本性质 微积分基本公式求解简单 定积分	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	曲边梯形面积 学生阅读 165 页内容，明确下列内容。 （1）什么是曲边梯形 （2）曲边梯形面积如何求得 （3）曲边梯形面积分割注意事项  如上图，类似这种图形都叫做曲边梯形。其面积的求解是通过分割法： （1）分割 任取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$， 把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，$i=1,2,3\cdots n$ 小区间长度记作 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ （2）取近似值 每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一个点 ξ_i， 竖线 $f(\xi_i)$ 做高，则得到小长条矩形的面积是 $\Delta A_i=f(\xi_i)\Delta x_i$，$i=1,2,3\cdots n$ （3）求和 把 n 个小矩形的面积相加，就得到区边梯形面积的近似值 $A=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ （4）取极限 为了保证所有的 Δx_i 都无限缩小，要求小区	学生阅读教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨	60 分钟

	间长度的最大值$\lambda = \max(\Delta \mathrm{x_i}), 1 \le i \le n$趋于零。这时和式的极限就是曲边梯形面积的精确值 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$				
3（任务2）	定积分 设函数$y = f(x)$在$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$上有定义，任取分点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，分$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$为 n 个小区间$[\mathrm{x_{i-1}}, \mathrm{x_i}]$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\lambda = \max(\Delta \mathrm{x_i}), 1 \le i \le n$，再在每个小区间$[\mathrm{x_{i-1}}, \mathrm{x_i}]$上取任一个点$\xi_i$，做和式： $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$，则当$\lambda \to 0$时，称上述和式的极限为$f(x)$在$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$上的定积分 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_\mathrm{i}) \Delta x_i$ 学生阅读 167 页关于定积分的几点说明，深入理解。 （1）定积分的几何意义就是曲边梯形的面积 （2）$a = b$时，$\int_a^b f(x)dx = 0$ $a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ （3）初等函数在定义域区间上都是可积的，但是有时有后原函数并一定求出。 根据定积分的概念，很容易求证下列定积分的几条性质，学生自己讨论学习，教师指导： （1）$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ （2）插入分点 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x)dx$，c 是任意一个点 （3）如果$\forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathrm{f(x)} \ge \mathrm{g(x)}$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ （4）设M, m分别是$f(x)$在$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$区间上的最大值和最	学生阅读教师启发讲解	板书	师 生研讨	90 钟

	小值，则 $m(\mathrm{a-b}) \le \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx \le M(\mathrm{a-b})$ （6）积分中值定理 如果 $f(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上连续，则至少 存在一个点 $\xi \in [\mathrm{a,b}]$，使得 $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx = f(\xi)(\mathrm{a-b})$ 例 根据上面（6）的知识估计 $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$  练习 估计 $\int_a^b Cdx$ 的值				
4 （任务3）	学生阅读 170-171 页知识，搞清楚 （1）什么是变上限函数 （2）微积分公式怎么表达的 设函数 f(x)在[a,b]上连续，任意的 x 属于[a,b],得到一个定积分 $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)}dt$，随着 x 的变化，$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)}dt$ 的值也在变化，就称它为 f(x)在[a,b]上的变上限定积分，记作 $\Phi(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)}dt$ 定理 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)}dt = f(x)$ 证明参见 171 页，学生阅读，教师指导。 例 计算 $\Phi(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{sin t}^2 dt$ 在 $x = 0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 处的导数 解 $\Phi'(0) = \sin 0^2 = 0$，$\Phi'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 例 求下列函数的导数 （1）$\Phi(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{e^x}} \frac{\mathrm{lnt}}{\mathrm{t}} dt$ （2）$\Phi(x) = \int_{\mathrm{x^2}}^{1} \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta} d\theta (x > 0)$ 案例 3 学生讨论解答 牛顿莱布尼茨公式	教师启发讲解	板书	师 生研讨	60 分钟

	定理　设函数f(x)在闭区间[a,b]上连续，又F(x)是f(x)的人一个原函数，则 $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \mathrm{F(a)}$$ 通常用下格式 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(b) - \mathrm{F(a)}$ 例 求下列简单的定积分 （1）$\int_1^2 (x + \frac{1}{x})dx$ （2）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-\mathrm{x})}}$ （3）$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}dx$ 案例 2 学生自行讨论学习解答				
5 任务4	简单定积分练习： (1) $\int_{-1}^{1} (\mathrm{x}-1)^2 dx$　(2) $\int_0^5 \|1-x\|dx$ (3) $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2}dx$　(4) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2x^2}{x^2(1+\mathrm{x}^2)}dx$ (5) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}dx$　(6) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2}dx$	教师启发讲解	板书	师　生研讨	50分钟
6 案例训练	所有案例在课堂进行中择时解答	学生思考教师提示			50分钟
作业	189页 第3、4大题				
课后体会					

5.4 定积分的积分方法 单元教学设计

一、教案头

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">单元标题</td><td rowspan="2">定积分的积分方法</td><td colspan="2">单元教学学时</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">在整体设计中的位置</td><td>第 13-16 次</td></tr>
<tr><td colspan="2">授课班级</td><td></td><td colspan="2">上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="2">能力目标</td><td>知识目标</td><td colspan="2">素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="2">①能够掌握定积分的换元法
②能够掌握定积分的分部积分法
③能够掌握广义积分的概念与计算</td><td>定积分的换元法
定积分的分部积分法
广义积分</td><td colspan="2">①深刻思维能力
②团结合作能力
③语言表达能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务及案例</td><td colspan="5">任务 1　定积分的换元法
任务 2　定积分的分部积分法
任务 3　广义积分
任务 4　定积分的积分练习
案例 1　计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$
案例 2　设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$
案例 3　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$
案例 4　计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx$</td></tr>
<tr><td>教学材料</td><td colspan="5">高等数学　湖南省教科所组编　高等教育出版社
高等数学及应用　吕同富主编　高等教育出版社
高等数学应用 205 例　李心灿主编　高等教育出版社
高等数学（第四版）　同济大学等编　高等教育出版社</td></tr>
</table>

二、教学设计

步骤	教学内容	教学方法	教学手段	学生活动	时间分配
1 （告知）	本单元学习目标： 定积分的换元法 定积分的分部积分法 定积分的积分练习	陈述	板书	识记	10 分钟
2 （引入任务 1）	定积分的换元法与不定积分的换元法基本一致，不一样的地方就是多了上下限，最后需要利用牛顿莱布尼茨公式求解最后结果。学生阅读 174 页内容，理解两者的不同，以及换元以后如何代入积分上下限。 （1）第一种情况是上下限不变，等换元法计算结束，再代入原来的上下限 （2）第二种情况是换元时，也同时把上下限变换。 例 求 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 第一种解法：先利用不定积分的知识求解积分结果 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \overset{令\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = \cdots = 2(\mathrm{t}-\ln\lvert 1+\mathrm{t}\rvert)+\mathrm{C}$ $=2[\sqrt{\mathrm{x}}-\ln(1+\sqrt{\mathrm{x}})]+\mathrm{C}$，于是 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2(\sqrt{\mathrm{x}}-\ln(1+\sqrt{\mathrm{x}}))\Big\vert_0^4 = 4-2\ln 3$ 第二种解法：上下限跟着变换同时变换 令 $\sqrt{x}=t$， $x=t^2$，当 $x=0$ 时 t=0，当 x=4 时 t=2，于是原式= $\int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t-\ln\lvert 1+\mathrm{t}\rvert)\Big\vert_0^2$ $=2(2-\ln 3)$ 从以上方法可看出，第二种方法较好，所以尽量使用第二种方法。 练习：求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$，提示：令 $\sqrt{e^x-1}=t$ 。 上面是比较明显的换元法，有时也可用凑微分法计算定积分。 例 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\cos tdt$	学生阅读教师讲解	教师提示	学生认真听讲分组研讨	60 分钟

<table>
<tr>
<td></td>
<td>解 注意观察，cost 可以转移到 d 的后面凑出 sint 来，然后把 sint 看成一个整体来解答
$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 td\sin t=\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$
这里实际上也是一个换元法，即令 sint=y，但是没写出而已。
练习 求解$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}$，建议用两种方法求解，换元法令
$t=\tan\frac{x}{2}$，凑微分需要把 sinx 拆成$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
下面是一个两个重要的结论：
（1）设 f(x)在对称区间[-a,a]上连续，则
当 f(x)时偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$
当 f(x)时奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$
学生自己从 176 页讨论证明
（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$
令 $x=\frac{\pi}{2}-t$
案例 学生解答案例 1　案例 2　案例 3</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3
（任务 2）</td>
<td>不定积分的分部积分法是一种重要的积分方法，定积分的分部积分法也是重要的，不同点就是定积分增加上下限。
公式$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$
例 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx$
解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d\sin x=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x=\frac{\pi^2}{4}+2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$
练习：
（1）$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\lvert\ln x\rvert dx$</td>
<td>学生阅读教师启发讲解</td>
<td>板书</td>
<td>师　生研讨</td>
<td>90 钟</td>
</tr>
</table>

	（2） $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ (3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$				
4 （任务3）	广义积分就是积分区间是 $(-\infty，a]$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,+\infty)$ 的积分。计算它们的积分，最后需要计算一个极限。 公式(1) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ (2) $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ (3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 广义积分有极限，则称之为收敛；反之，称之为发散。 例 $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ 解 $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big\|_0^b=1$ 例 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big\|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$ 练习： （1） $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ （2） $\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$	教师启发讲解	板书	师　生研讨	60分钟
5 任务4	定积分练习： （1）计算 $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ （2）计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$ （3）计算 $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$ （4）计算 $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$ （5）计算 $\int_1^5\frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx$ （6）计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ （7）已知 $\int_0^{\ln a}e^x\sqrt{3-2e^x}dx=\frac{1}{3}$。求 a	教师启发讲解	板书	师　生研讨	50分钟

<table>
<tr><td></td><td>（8）当 $x>0$ 时，证明：$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$
案例 4 学生讨论解答</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6
案例
训练</td><td>所有案例在课堂进行中择时解答</td><td>学生
思考
教师
提示</td><td></td><td></td><td>50 分
钟</td></tr>
<tr><td>作业</td><td colspan="5">189 页 第 7、10、12 大题</td></tr>
<tr><td>课后
体会</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>