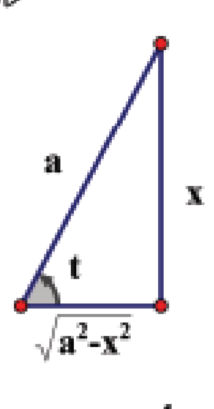
第二类换元积分法单元教学设计

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="2">单元名称：　第二类换元积分法</td><td>单元教学学时</td><td>2</td></tr>
<tr><td>在整体设计中的位置</td><td>第 23 次</td></tr>
<tr><td>授课班级</td><td></td><td>上课时间</td><td></td><td>上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td colspan="3">能力目标</td><td>知识目标</td><td>素质目标</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. 会求被积函数含有根号的不定积分和定积分
2. 会用三角换元求积分</td><td>1. 理解不定积分的第二换元积分法；
2. 理解定积分的第二换元积分法；
3. 了解三角换元的积分方法</td><td>培养学生运算能力</td></tr>
<tr><td>能力训练任务</td><td colspan="5">任务 1　不定积分第二类换元积分法
任务 2　定积分第二类换元积分法
任务 3　案例训练
案例 1　$\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$
案例 2　$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$
案例 3　$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$</td></tr>
<tr><td>本次课使用的外语单词</td><td colspan="5">不定积分　Indefinite integral</td></tr>
<tr><td>案例和教学材料</td><td colspan="5">1. 教材：《高等数学及其应用（第 3 版）》，吕同富，高等教育出版社，2018. 4.</td></tr>
</table>

单元教学进度

步骤	教学内容及能力/知识目标	教师活动	学生活动	时间分配

1（任务 1）	不定积分的换元法种类大题有两类种，一种是消掉根号的模式，另一种是三角函数换元。 （1）消掉根号 例 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ 为了消掉根号，令 $\sqrt{x}=t$，这样 $x=t^2$，$dx=2tdt$，于是原来的不定积分变成了： $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}=2\int \frac{t^2dt}{1+t}=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$ $=t^2-2t+2\ln\|1+t\|+C$ 练习：（1）$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$ （2）$\int \frac{dx}{1+\sqrt{3-x}}$ （2）三角函数换元 例 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ 本例要是直接代换根号，做不出来，必须另寻其他途径。令 $x=a\sin t$，$dx=a\cos tdt$，代入原来的不定积分得： $\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos ta\cos tdt=a^2\int \cos^2 dt$ $=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^3}{2}(t+\sin t\cos t)+C$ 下面利用直角三角形把 t 转换成 x。首先根据代换公式 $x=a\sin t$，得 $\sin t=\frac{x}{a}$，做角度是 t 的直角三角形  所以 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 所以，最后所求的不定积分是	教师启发讲解	学生认真听讲分组研讨	30 分钟

	$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$ 三角代换常用还有 cosx, tanx 等			
2（任务2）	定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件： （1）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上单调，且有连续导函数 $\varphi'(t)$；（2）设 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 用此公式计算定积分的方法称为定积分的换元积分法. 例 1 求 $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 第一种解法：先利用不定积分的知识求解积分结果 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\overset{令\sqrt{x}=t}{=}\int\frac{2tdt}{1+t}=\cdots$ $=2(\mathrm{t}-\ln\|1+\mathrm{t}\|)+\mathrm{C}$ $=2[\sqrt{\mathrm{x}}-\ln(1+\sqrt{\mathrm{x}})]+\mathrm{C}$，于是 $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2(\sqrt{\mathrm{x}}-\ln(1+\sqrt{\mathrm{x}}))\Big\|_0^4=4-2\ln3$	教师启发讲解注意两个定理的不同和联系	分组研讨	30 分钟
3（任务3）	案例操练 案例 1　$\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$ 案例 2　$\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ 案例 3　$\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	教师讲授	学生认真听课并回答问题	20 分钟

总结	掌握不定积分的第二换元积分法.一般地，当被积函数含有 （1）$\sqrt{a^2-x^2}$,可作替换$x=\sin t$; （2）$\sqrt{x^2+a^2}$,可作替换$x=a\tan t$； （3）$\sqrt{x^2-a^2}$，可作替换$x=a\sec t$.	10 分钟
作业	课后习题	
课后体会	对于第二类换元积分法，学生对这个方法理解不是特别好，要多做题，熟悉被积函数的特点，问题也就好解决了.	