# 第 43 课　幂级数

| | | |
|---|---|---|
| **课　题** | 幂级数 | |
| **课　时** | 2 课时（90 min） | |
| **教学目标** | **知识技能目标：**<br>1．理解函数项级数、幂级数的基本概念和性质<br>2．会求幂级数的收敛半径、收敛域及幂级数的和函数<br>**思政育人目标：**<br>通过讲解幂级数的相关知识，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神 | |
| **教学重难点** | **教学重点：**幂级数的基本概念<br>**教学难点：**幂级数的和函数的求法 | |
| **教学方法** | 讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 | |
| **教学用具** | 电脑、投影仪、多媒体课件、教材 | |
| **教学设计** | **第一节课：课前任务→考勤（2 min）→复习（10 min）→讲授新课（33 min）**<br>**第二节课：讲授新课（20 min）→课堂测验（10 min）→互助指导（12 min）→课堂小结（3 min）→课后拓展** | |
| **教学过程** | 主 要 教 学 内 容 及 步 骤 | 设计意图 |
| **第一节课** | | |
| **课前任务** | 【教师】和学生负责人取得联系，布置课前任务，提醒同学做完作业，在指定时间内交齐<br>【学生】做完作业，在指定时间内交齐<br>【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件，布置课前问答题：<br>（1）什么是函数项级数？<br>（2）什么是幂级数？<br>【学生】查找资料，预习教材 | 通过课前的预热，让学生了解所学科目的大概方向，激发学生的学习欲望 |
| **考勤**<br>（2 min） | 【教师】清点上课人数，记录好考勤<br>【学生】班干部报请假人员及原因 | 培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况 |
| **复习**<br>（10 min） | 【教师】提前设计好复习题目，并针对学生存在的问题及时讲解<br>【学生】做复习题目 | 复习所学内容，为讲授新课打好基础 |

**讲授新课**

（33 min）

**【教师】讲解函数项级数的基本概念**

**定义 1**　给定一个定义在区间 $I$ 上的函数列 $\{u_n(x)\}$，由这个函数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

称为定义在区间 $I$ 上的**函数项级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ .

对于区间 $I$ 内的一定点 $x_0$，若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称点 $x_0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**．若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，则称点 $x_0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**.

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的所有收敛点的全体称为它的**收敛域**，所有发散点的全体称为它的**发散域**.

在收敛域上，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和是 $x$ 的函数 $s(x)$，$s(x)$ 称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数**，并写成 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ .

**【教师】讲解幂级数的基本概念，并通过例题介绍幂级数收敛半径和收敛域的求法**

**定义 2**　若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中各项都是幂函数，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

则此级数称为**幂级数**，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 都是常数，称为幂级数的**系数**，$a_nx^n$ 称为幂级数的**通项**.

幂级数更一般的形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

令 $t=x-x_0$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 即化为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ .

对于每一个确定的实数 $x_0$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 会变成如下常数项级数：

学习函数项级数和幂级数基本概念，以及幂级数收敛半径和收敛域的求法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0{}^n + \cdots .$$

这个级数可能收敛，也可能发散．若该级数收敛，则称点 $x_0$ 是幂级数的收敛点；若该级数发散，则称点 $x_0$ 是幂级数的发散点，幂级数所有收敛点的全体组成的集合称为它的收敛域，记作 $I$．在收敛域上，幂级数的和是 $x$ 的函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为幂级数的和函数．其定义域就是级数的收敛域，并记为

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in I .$$

对于一个给定的幂级数，它的收敛域和发散域的结构如何呢？例如，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

可以看作是一个公比为 $x$ 的几何级数．根据前面的讨论，当 $|x|<1$ 时，该级数收敛于 $\dfrac{1}{1-x}$；当 $|x| \geqslant 1$ 时，该级数发散，因此这个幂级数的收敛域是一个区间 $(-1, 1)$．若在收敛域内取值，则有

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1) .$$

由此我们可以看到，这个幂级数的收敛域是一个区间．

**定理 1**　设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ .

（1）若 $0<\rho<+\infty$，当 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；当 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；

（2）当 $\rho = 0$ 时，对于任意 $x$，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

（3）当 $\rho = +\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x = 0$ 处收敛．

**注　意**

定理 1 说明，当 $0<\rho<+\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在开区间 $\left(-\dfrac{1}{\rho}, \dfrac{1}{\rho}\right)$ 内绝对收敛，在 $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\rho}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\rho}, +\infty\right)$ 内发散，在 $x = -\dfrac{1}{\rho}$ 和 $x = \dfrac{1}{\rho}$ 两点处可能收敛也可能发散．

令 $R = \dfrac{1}{\rho}$，称 $R$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**，开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的**收敛区间**．

由定理 1 知，当 $\rho = 0$ 时，幂级数处处收敛，此时规定收敛半径 $R = +\infty$，收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$；当 $\rho = +\infty$ 时，幂级数仅在 $x = 0$ 处收敛，此时规定收敛半径 $R = 0$ .

<table>
<tr><td></td><td>

**定理 2**　设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则此幂级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}+\infty, & \rho=0,\\ \frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

对于幂级数的收敛域，可先根据定理 2 求出收敛半径 $R$ 和收敛区间 $(-R,+R)$，再将区间的端点 $x=\pm R$ 代入幂级数中，幂级数化为常数项级数，讨论其敛散性，就可得到幂级数的收敛域.

**例 1**　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径与收敛域.

**解**　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$$

所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 $x=1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，是收敛的；当 $x=-1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$，是发散的．因此，收敛域为 $(-1,1]$.

（例 2～例 5 详见教材）

【学生】掌握函数项级数和幂级数的基本概念，以及幂级数收敛半径和收敛域的求法

</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">

**第二节课**

</td></tr>
<tr><td>

**讲授新课**

（20 min）

</td><td>

**【教师】讲解幂级数的性质，并通过例题介绍幂级数和函数的求法**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 分别在区间 $(-R,R)$ 及 $(-R',R')$ 内收敛，则在 $(-R,R)$ 与 $(-R',R')$ 中较小的区间内可进行加法、减法及乘法运算：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,$$

</td><td>学习幂级数的运算。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots .$$

**性质 1** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 $I$ 上连续.

**性质 2** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 $I$ 上可积，并且有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \quad (x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

**性质 3** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，并且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R),$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

**例 6** 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的和函数.

**解** 求得幂级数的收敛域为 $[-1, 1)$. 设和函数为 $s(x)$，即

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n, \quad x \in [-1, 1).$$

显然，$s(0) = 1$.

在 $xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 的两边求导得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

对上式从 0 到 $x$ 积分，得

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\ln(1-x).$$

于是，当 $x \neq 0$ 时，有 $s(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

因此，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的和函数为

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & -1,, x < 0 \text{或} 0 < x < 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**例 7** 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 的和.

| | | |
|---|---|---|
| | 解　考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$，此级数在 $[-1,1)$ 上收敛，设其和函数为 $s(x)$，则 $s(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.<br>在例 6 中已得到 $xs(x)=-\ln(1-x)$，于是<br>$-s(-1)=-\ln 2$，<br>即　$s(-1)=\ln 2$，<br>因此，　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$.<br><br>【学生】理解幂级数的性质，掌握幂级数和函数的求法 | |
| **课堂测验**<br>（10 min） | **☞教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。**<br>【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况<br>【学生】做测试题目 | 通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象 |
| **互助指导**<br>（12 min） | **☞选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点**<br>【教师】公布题目的正确答案，每组指定一名答题准确率最高的同学，辅导本组的未答对同学掌握答题知识，实现组内互助<br>【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧 | 以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点 |
| **课堂小结**<br>（3 min） | 【教师】简要总结本节课的要点<br>本节课上大家理解了函数项级数、幂级数的基本概念和性质，掌握了求幂级数的收敛半径、收敛域及幂级数的和函数的方法，课后要多加练习，巩固认知<br>【学生】总结回顾知识点<br>【教师】布置课后作业：习题 8-3 | 总结知识点，巩固印象 |
| **课后拓展** | 【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接<br>【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务 | 延展知识面，多学科交叉学习 |
| **教学反思** | 本节课的教学效果非常好，特别是在通过例题介绍幂级数和函数的求法时，尝试让学生自己进行分析，取得了出乎意料的成果，学生们都非常主动地参与进来，且分析得很有条理，这样不但加深了学生的理解，且学生感觉自己真正成为了学习的主人，提高了学生学习的积极性 | |