

第 41 课 常数项级数的概念和性质

课 题	常数项级数的概念和性质	
课 时	2 课时 (90 min)	
教学目标	<p>知识技能目标:</p> <p>1. 掌握常数项级数的一般概念, 及其应用</p> <p>2. 理解常数项级数的基本性质</p> <p>思政育人目标:</p> <p>通过讲解常数项级数的概念和性质, 培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力; 引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯; 树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神</p>	
教学重难点	<p>教学重点: 级数的基本性质、收敛的必要条件、几何级数</p> <p>教学难点: 判断级数的敛散性</p>	
教学方法	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法	
教学用具	电脑、投影仪、多媒体课件、教材	
教学设计	<p>第一节课: 课前任务→考勤(2 min)→趣味阅读(10 min)→讲授新课(33 min)</p> <p>第二节课: 讲授新课(20 min)→课堂测验(10 min)→互助指导(12 min)→课堂小结(3 min)→课后拓展</p>	
教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
第一节课		
课前任务	<p>【教师】和学生负责人取得联系, 布置课前任务, 提醒同学做完作业, 在指定时间内交齐</p> <p>【学生】做完作业, 在指定时间内交齐</p> <p>【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件, 布置课前问答题:</p> <p style="padding-left: 2em;">(1) 什么是常数项级数?</p> <p style="padding-left: 2em;">(2) 常数项级数有何作用?</p> <p>【学生】查找资料, 预习教材</p>	通过课前的预热, 让学生了解所学科目的大概方向, 激发学生的学习欲望
考勤 (2 min)	<p>【教师】清点上课人数, 记录好考勤</p> <p>【学生】班干部报请假人员及原因</p>	培养学生的组织纪律性, 掌握学生的出勤情况
趣味阅读 (10 min)	<p>【教师】讲述《冯·诺依曼与蜜蜂问题》, 导入无穷级数的概念</p> <p>【学生】理解无穷级数的概念</p>	通过趣味阅读, 引导学生理解无穷级数的概念

【教师】通过具体问题推导出常数项级数的一般概念，并通过例题介绍其应用

举一个具体例子：在计算半径为 R 的圆面积 S 时，可先作圆的内接正六边形 $ABCDEF$ ，其面积记为 u_1 ，则 u_1 就是圆面积 S 的一个粗略的近似值，如图 8-1 所示。

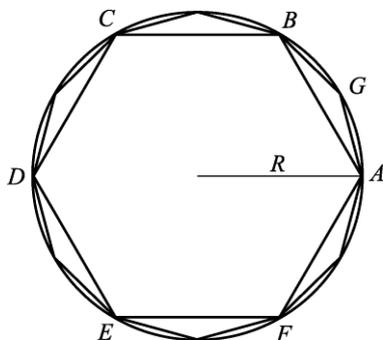


图 8-1

如果再以这正六边形的每一边为底边，在弓形内作顶点在圆上的六个等腰三角形（ $\triangle ABG$ 是其中之一），得圆内接正十二边形。设这六个新增的等腰三角形的面积之和为 u_2 ，则圆内接正十二边形的面积为 $u_1 + u_2$ ，它也是圆面积的一个近似值，其近似程度要比前一个好。同样地，再增加十二个等腰三角形，得圆内接二十四边形，设这十二个等腰三角形的面积为 u_3 ，则圆内接二十四边形的面积为 $u_1 + u_2 + u_3$ ，它仍是圆面积的一个近似值，其程度当然比前面的近似值都要好。

如此继续进行 n 次，这个圆的面积就十分地近似等于圆内接正 3×2^n 边形的面积：

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n .$$

n 越大，则近似程度越好。当 $n \rightarrow \infty$ 时，和 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ 的极限，就是这个圆的面积，也就是说，圆面积 S 是无穷多个数累加的和，即

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots .$$

把上面的具体问题抽象以后，就得到无穷级数的一般概念。

定义 1 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ，则由这个数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数，简称级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots ,$$

讲授新课

(33 min)

学习常数项级数的一般概念。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项或通项. 各项都是常数的级数称为常数项级数.

作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \text{ 称为级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 的部分和.}$$

定义 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s , 即

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这时极限 s 称为该级数的和, 并写成

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若数列 $\{s_n\}$ 没有极限, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, 其部分和 s_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和 s 的近似值, 它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项.

例 1 讨论等比级数 (几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性, 其中 $a \neq 0$, q 为级数的公比.

解 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$, 所以此时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛,

其和为 $\frac{a}{1 - q}$.

当 $|q| > 1$ 时, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, 所以此时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

若 $|q| = 1$, 当 $q = 1$ 时, $s_n = na$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散; 当 $q = -1$

时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 成为 $a - a + a - a + \cdots$, s_n 随着 n 为奇数或

偶数而等于 a 或零, 所以 s_n 的极限不存在, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 也发

散.

综上所述, 若 $|q| < 1$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - q}$;

	<p>若 $q \dots 1$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.</p> <p>(例 2~例 5 详见教材)</p> <p>【学生】理解常数项级数的一般概念, 并掌握其应用</p>	
<h2 style="margin: 0;">第二节课</h2>		
<p>讲授新课</p> <p>(20 min)</p>	<p>【教师】讲解常数项级数的 4 个基本性质, 并通过例题介绍其应用</p> <p>根据级数敛散性的概念, 可以得到常数项级数的几个基本性质.</p> <p>性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks.</p> <p>性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.</p> <p>例 6 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right]$ 的敛散性.</p> <p>解 由几何级数的敛散性可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ 均收敛, 因此根据性质 2 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right]$ 也收敛.</p> <p>性质 3 在级数中添加、去掉或改变有限项, 不会改变级数的敛散性. 但对于收敛级数, 其和一般要改变.</p> <p>性质 4 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.</p> <p>因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件, 所以有以下推论.</p> <p>推论 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 u_n 不趋于零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.</p> <p>例 7 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.</p>	<p>学习常数项级数的基本性质. 边做边讲, 及时巩固练习, 实现教学做一体化</p>

	<p>解 因为</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0,$ <p>所以</p> $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n} \text{ 发散.}$ <p>【学生】理解常数项级数的基本性质，掌握其应用</p>	
<p>课堂测验 (10 min)</p>	<p>▣教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。 【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目</p>	<p>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</p>
<p>互助指导 (12 min)</p>	<p>▣选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点 【教师】公布题目的正确答案，每组指定一名答题准确率最高的同学，辅导本组的未答对同学掌握答题知识，实现组内互助 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</p>	<p>以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点</p>
<p>课堂小结 (3 min)</p>	<p>【教师】简要总结本节课的要点 本节课上大家掌握了常数项级数的一般概念，还理解了常数项级数的基本性质，并通过例题介绍了所学知识的具体应用，课后要多加练习，巩固认知 【学生】总结回顾知识点 【教师】布置课后作业：习题 8-1</p>	<p>总结知识点，巩固印象</p>
<p>课后拓展</p>	<p>【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接 【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务</p>	<p>延展知识面，多学科交叉学习</p>
<p>教学反思</p>	<p>本节课由于所讲知识中重点和难点的把握较好，因此取得了不错的效果。我在教学过程中体会到，对教学重点、难点的把握正确与否，决定着教学过程的意义。若不正确，教学过程就失去了意义，若不明确，教学过程就失去了方向。因此重点和难点是教学活动的依据，也是教学活动中的重点和方向，一定要把握好</p>	