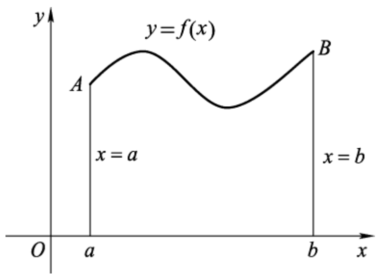
第 21 课　定积分的概念

<table>
<tr><td>课　题</td><td colspan="2">定积分的概念</td></tr>
<tr><td>课　时</td><td colspan="2">2 课时（90 min）</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="2">知识技能目标：
1．通过两个引例，理解定积分的概念
2．理解定积分的定义，掌握定积分的计算
3．理解定积分的几何意义和实际应用
思政育人目标：
通过生活中常见的不规则图形面积，引导学生学习定积分的概念，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重难点</td><td colspan="2">教学重点：理解定积分的概念
教学难点：理解定积分的几何意义和实际应用</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="2">讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法</td></tr>
<tr><td>教学用具</td><td colspan="2">电脑、投影仪、多媒体课件、教材</td></tr>
<tr><td>教学设计</td><td colspan="2">第一节课：课前任务→考勤（2 min）→背景导入（10 min）→讲授新课（33 min）
第二节课：讲授新课（22 min）→课堂测验（10 min）→课堂指导（10 min）→课堂小结（3 min）→课后拓展</td></tr>
<tr><td>教学过程</td><td>主 要 教 学 内 容 及 步 骤</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>课前任务</td><td>【教师】和学生负责人取得联系，布置课前任务，提醒同学做完作业，在指定时间内交齐
【学生】做完作业，在指定时间内交齐
【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件，布置课前问答题：
（1）积分学是研究什么的？
（2）定积分是因为哪些实际问题产生的？
（3）什么是定积分？
（4）定积分的几何意义和物理意义是什么？
【学生】查找资料，预习教材</td><td>通过课前的预热，让学生了解所学科目的大概方向，激发学生的学习欲望</td></tr>
<tr><td>考勤
（2 min）</td><td>【教师】清点上课人数，记录好考勤
【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
</table>

背景导入 （10 min）	【教师】讲述积分学产生的历史背景，微分学和积分学之间的联系 【学生】聆听、了解	通过背景导入，吸引学生关注，调动学生的主观能动性
讲授新课 （33 min）	**【教师】引入课题** 在实际问题中，我们经常会遇到某些非均匀量的求和问题，如计算不规则图形的面积和体积、变速直线运动的路程、非匀质物体的质量、变力所做的功等，虽然它们各自的意义不同，但这些问题的解决都可归结为“无限细分，无限求和”的过程．先看下面两个实例． **【教师】通过讲解两个引例（曲边梯形的面积和变速直线运动的路程），引出定积分的概念** 引例 1　**曲边梯形的面积** 设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\ldots 0$，则由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形，称为**曲边梯形**，如图 5-1 所示．试求此曲边梯形的面积．  图 5-1 如何计算曲边梯形的面积呢？由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，因此在很小一段区间上它的变化很小，近似于不变． 将区间 $[a,b]$ 划分为许多小区间，曲边梯形也相应地被划分成许多小曲边梯形．如果在每个小区间上用其中某一点的高近似代替同一区间上小曲边梯形的变高，那么每个小曲边梯形就可以近似看成小矩形．以这些小矩形的面积作为小曲边梯形面积的近似值，并将区间 $[a,b]$ 无限细分下去，使每个小区间的长度都趋于 0，这时所有小矩形面积之和的极限就是曲边梯形的面积． 根据上面的分析，可按下面的步骤计算曲边梯形的面积． 1）分割 任取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间，即 $$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$ 每个小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$．相应地，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，其面积为 $\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$． 2）近似代替	从实际实例引出定积分的概念，从具体到抽象地讲解定积分的概念

对于第 i 个小曲边梯形，在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到以区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长 Δx_i 为底，以 $f(\xi_i)$ 为高的小矩形（见图 5-2），用小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积 ΔS_i，即

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

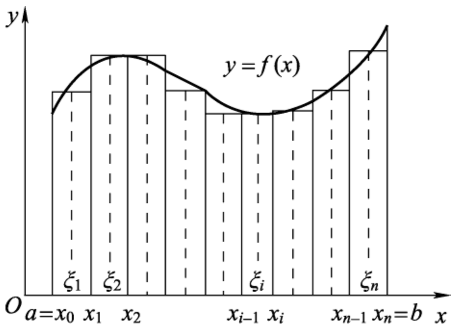


图 5-2

3）求和

将 n 个小矩形的面积加起来，便得到曲边梯形面积的近似值，即

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_n \approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

4）取极限

当分点个数 n 无限增大，且小区间长度的最大值 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ 趋近于 0 时，上述和式的极限便是曲边梯形的面积，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

引例 2 **变速直线运动的路程**

设一物体做变速直线运动，其速度是时间 t 的连续函数 $v=v(t)$，求物体在时间段 $[T_1, T_2]$ 内所经过的路程 S.

我们知道，匀速直线运动的路程公式是 $S=vt$，现设物体的运动速度 v 是随时间连续变化的，因此不能直接用此公式计算路程，但可以采用以下方法计算.

1）分割

任取分点 $T_1=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$，把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小时间段 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{i-1}, t_i], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$，第 i 个小区间的长度为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，相应的路程被分成了 n 个小路程，记作 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

2）近似代替

在每个小时间段上以匀速直线运动的路程近似代替变速直线运动的路程，即在小时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一时刻

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，用速度 $v(\xi_i)$ 近似代替这个小时间段 $[t_{i-1},t_i]$ 上的速度，则有

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

3）求和

将所有小时间段的路程 ΔS_i 求和，便得到总路程的近似值，即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i .$$

4）取极限

若分点的个数 n 无限增大，令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的极限便是所求的路程 S 的精确值，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i .$$

从上面两个实例可以看出，虽然二者的实际意义不同，但是解决问题的方法是相同的，即采用“分割—近似—求和—取极限”的方法，最后都归结为同一种结构的和式极限问题．类似这样的实际问题还有很多，我们抛开实际问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质特征，从数学的结构加以研究，抽象出定积分的概念．

【学生】理解定积分的概念

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

第二节课

</td>
</tr>
<tr>
<td>

讲授新课

（22 min）

</td>
<td>

【教师】**讲解定积分的定义，通过例题介绍定积分的计算方法**

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，任意取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$，称为**子区间**，其长度记作

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 $\xi_i\ (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，得相应的函数值 $f(\xi_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ．

令 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$，若 $\lambda\to 0$，上述和式的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**，并将此极限值称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

</td>
<td>

学习定积分的定义、计算方法，以及定积分的几何意义和实际应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

</td>
</tr>
</table>

其中，$\int$ 称为**积分号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，区间 $[a,b]$ 称为**积分区间**，a,b 分别称为**积分下限**与**积分上限**.

指点迷津

关于定积分的定义作如下说明.

（1）和式极限存在（即函数可积），是指不论对区间 $[a,b]$ 怎样划分及点 ξ_i 如何选取，极限都唯一存在.

（2）定积分只与被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关，与积分变量的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u .$$

（3）**定积分的存在性**：当 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点时，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分存在（即可积）. 初等函数在定义区间内部都是可积的.

（4）定义是在 $a<b$ 的情况下给出的，但不管 $a<b$ 还是 $a>b$，总有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x .$$

例 1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 （1）分割：用分点 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$，把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份，那么分点为

$$x_i=\frac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n),$$

每个小区间的长度为 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$.

（2）近似代替：取每个区间的右端点 $\xi_i=\dfrac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)$，于是小曲边梯形的面积为

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i=\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{i^2}{n^3}\,(i=1,2,\cdots,n) .$$

（3）求和：曲边梯形面积 S 的近似值为

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

（4）取极限：因为 $\lambda=\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，当 $\lambda\to0$ 时，$n\to\infty$，所以

$$S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

【教师】借助实际案例（图形、物理的变速直线运动），讲解定积分的几何意义和实际应用

从曲边梯形面积的计算可以看出：

（1）若在$[a,b]$上，$f(x) \geqslant 0$，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示由曲线$f(x)$、直线$x=a$，$x=b$及x轴所围成曲边梯形的面积A，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$，如图 5-3 所示.

（2）若在$[a,b]$上，$f(x) \leqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$，如图 5-4 所示.

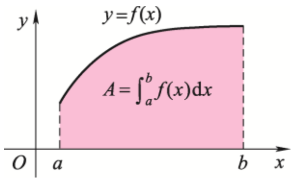


图 5-3

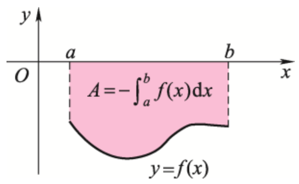


图 5-4

（3）若在$[a,b]$上，$f(x)$有正有负，即$f(x)$的图像某些部分在x轴上方，某些部分在x轴下方，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示x轴上方图形的面积与x轴下方图形的面积之差，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$，如图 5-5 所示.

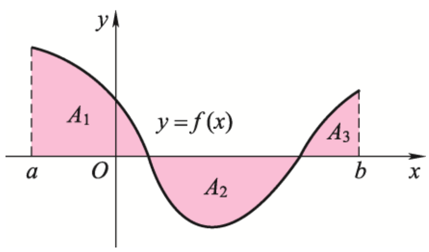


图 5-5

提示

根据定积分的定义和几何意义，显然有如下结论：

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$；

（2）若在$[a,b]$上，$f(x) \equiv 1$，则$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$，如图 5-6 所示；

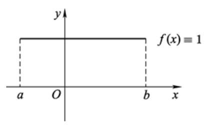
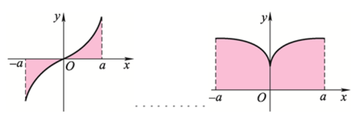


图 5-6

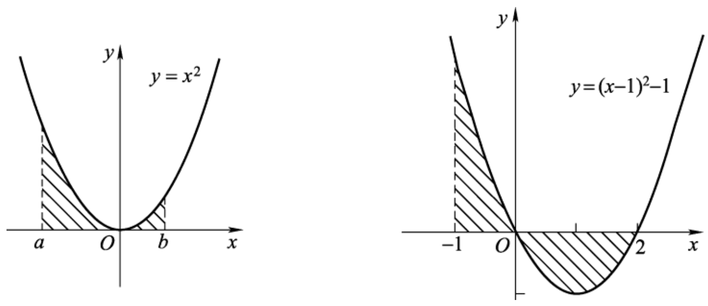
（3）若奇偶函数在对称区间$[-a,a]$上连续（见图 5-7），定积分计算可化简，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数时}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{为偶函数时}. \end{cases}$$



（a）　（b）

图 5-7

	例 2 利用上述结论计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$. **解** 因为被积函数 $y=\sin x$ 是奇函数，且积分区间 $[-\pi,\pi]$ 是对称区间，由上述结论可知 $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0 .$$ **例 3** 用定积分表示如图 5-8 所示阴影部分的面积.  （1） （2） 图 5-8 **解** （1）被积函数 $y=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(x) \geqslant 0$，由定积分的几何意义可得阴影部分的面积 $$A=\int_a^b x^2\mathrm{d}x .$$ （2）被积函数 $f(x)=(x-1)^2-1$ 在区间 $[-1,2]$ 上连续，且在 $[-1,0]$ 上 $f(x) \geqslant 0$，在 $[0,2]$ 上 $f(x) \leqslant 0$，由定积分的几何意义可得阴影部分的面积 $$A=\int_{-1}^{0}[(x-1)^2-1]\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}[(x-1)^2-1]\mathrm{d}x .$$ （例 4、例 5 详见教材） 【学生】理解定积分的定义和几何意义，掌握定积分的计算方法和在实际中的应用	
课堂测验 （10 min）	☞**教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。** 【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象

课堂指导 （10 min）	**☞选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点** 【教师】公布题目的正确答案，让答题快且正确的同学上台解答，为同学们做示范。如果题目比较难，无人答对则老师示范。 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点
课堂小结 （3 min）	【教师】简要总结本节课的要点 本节课上大家理解了定积分的概念和定积分的定义，并掌握了定积分的计算、几何意义和实际应用，课后要多加练习，巩固认知 【学生】总结回顾知识点 【教师】布置课后作业：习题 5-1	总结知识点，巩固印象
课后拓展	【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接 【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务	延展知识面，多学科交叉学习
教学反思	本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题	