

## 第 22 课 不定积分的概念与性质

<b>课 题</b>	不定积分的概念与性质	
<b>课 时</b>	2 课时 (90 min)	
<b>教学目标</b>	<p><b>知识技能目标:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 通过实际例子, 理解原函数和不定积分的概念</li> <li>2. 理解不定积分的几何意义</li> <li>3. 熟记基本积分公式和不定积分的性质</li> </ol> <p><b>思政育人目标:</b></p> <p>通过引例, 引出原函数和不定积分的概念, 通过图形介绍不定积分的几何意义, 使学生体会到数学是源于生活的, 而不是脱离实际生活的; 培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力; 引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯; 引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘, 在实践中深化认识, 达到学以致用目的</p>	
<b>教学重难点</b>	<p><b>教学重点:</b> 理解不定积分的概念和性质, 熟记基本积分公式</p> <p><b>教学难点:</b> 理解不定积分的几何意义</p>	
<b>教学方法</b>	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法	
<b>教学用具</b>	电脑、投影仪、多媒体课件、教材	
<b>教学设计</b>	<p><b>第一节课:</b> 课前任务→考勤 (2 min) →复习 (10 min) →讲授新课 (33 min)</p> <p><b>第二节课:</b> 讲授新课 (22 min) →课堂测验 (10 min) →互助指导 (10 min) →课堂小结 (3 min) →课后拓展</p>	
<b>教学过程</b>	主要教学内容及步骤	设计意图
<b>第一节课</b>		
<b>课前任务</b>	<p><b>【教师】</b> 和学生负责人取得联系, 布置课前任务, 提醒同学做完作业, 在指定时间内交齐</p> <p><b>【学生】</b> 做完作业, 在指定时间内交齐</p> <p><b>【教师】</b> 通过文旌课堂 APP 或其他学习软件, 布置课前问答题:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 什么是原函数和不定积分?</li> <li>(2) 基本积分公式有哪些?</li> </ol> <p><b>【学生】</b> 查找资料, 预习教材</p>	通过课前的预热, 让学生了解所学科目的大概方向, 激发学生的学习欲望
<b>考勤</b> (2 min)	<p><b>【教师】</b> 清点上课人数, 记录好考勤</p> <p><b>【学生】</b> 班干部报请假人员及原因</p>	培养学生的组织纪律性, 掌握学生的出勤情况

<p style="text-align: center;"><b>复习</b></p> <p style="text-align: center;">(10 min)</p>	<p>【教师】提前设计好上节课的复习题目，并针对学生存在的问题及时讲解</p> <p>【学生】做复习题目</p>	<p>复习上节课所学内容，为讲授新课打好基础</p>
<p style="text-align: center;"><b>讲授新课</b></p> <p style="text-align: center;">(33 min)</p>	<p>【教师】通过引例，引出原函数和不定积分的概念，并通过例题介绍其应用</p> <p>在第3章中，我们通过研究变速直线运动引出了导数的概念，即已知物体运动的位置函数为 <math>s = s(t)</math>，则 <math>s(t)</math> 的导数就是瞬时速度，即 <math>s'(t) = v(t)</math>。而在实际中常常会遇到相反的问题。</p> <p><b>引例</b> 若已知物体的运动速度为 <math>v(t) = 2t</math>，怎样确定它的位置函数 <math>s = s(t)</math> 呢？</p> <p>根据导数的物理意义，要找的函数 <math>s = s(t)</math> 应满足 <math>s'(t) = v(t) = 2t</math>。不难看出 <math>s(t) = t^2</math> 就满足上述要求。抽去该问题的物理背景，从数学角度看，就是寻找一个函数，使它的导数等于已知函数。此时我们称位置函数 <math>s(t) = t^2</math> 为速度函数 <math>v(t) = 2t</math> 的一个原函数。</p> <p><b>定义 1</b> 设函数 <math>f(x)</math> 是定义在区间 <math>I</math> 上的已知函数，若存在函数 <math>F(x)</math>，使对于区间 <math>I</math> 上任意一点 <math>x</math> 都有</p> $F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$ <p>则称函数 <math>F(x)</math> 是 <math>f(x)</math> 在区间 <math>I</math> 上的一个<b>原函数</b>。</p> <p>例如，<math>(x^2)' = 2x</math>，故 <math>x^2</math> 是 <math>2x</math> 在 <math>(-\infty, +\infty)</math> 上的一个原函数。而 <math>(x^2 + 1)' = 2x</math>，说明 <math>x^2 + 1</math> 也是 <math>2x</math> 在 <math>(-\infty, +\infty)</math> 上的一个原函数，同样对于任意常数 <math>C</math>，<math>x^2 + C</math> 都是 <math>2x</math> 在 <math>(-\infty, +\infty)</math> 上的原函数。可见函数 <math>f(x) = 2x</math> 的原函数不是唯一的。</p> <p>一般地，对于给定的函数 <math>f(x)</math>，若存在一个原函数 <math>F(x)</math>，则必定存在无穷多个原函数，因为对于任意常数 <math>C</math>，都有 <math>[F(x) + C]' = f(x)</math>。那么，这些原函数之间具有什么样的关系？如何寻求所有的原函数呢？下面，给出如下定理。</p> <p><b>定理</b> 若函数 <math>F(x)</math> 是 <math>f(x)</math> 的一个原函数，则 <math>f(x)</math> 有无穷多个原函数，且 <math>F(x) + C</math> (<math>C</math> 是任意常数) 是 <math>f(x)</math> 的全体原函数。</p> <p>为表示全体原函数，我们给出下面的定义。</p> <p><b>定义 2</b> 函数 <math>f(x)</math> 的全体原函数 <math>F(x) + C</math> (<math>C</math> 是任意常数) 称为 <math>f(x)</math> 的<b>不定积分</b>，记作 <math>\int f(x)dx</math>，即</p> $\int f(x)dx = F(x) + C.$ <p>其中，<math>\int</math> 称为<b>积分号</b>，<math>f(x)</math> 称为<b>被积函数</b>，<math>f(x)dx</math> 称为<b>被</b></p>	<p>从实际案例引出原函数和不定积分的概念，从具体到抽象地讲解原函数和不定积分的概念</p>

**积表达式**,  $x$  称为**积分变量**,  $C$  称为**积分常数**.

由以上定义可知, 若  $F'(x) = f(x)$ , 则有

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

**Q 例 1** 求  $\int x^2 dx$ .

**解** 由于  $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ , 即  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数, 因此

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

(例 2、例 3 详见教材)

**【学生】** 理解原函数和不定积分的定义

## 第二节课

**【教师】** 通过图形介绍不定积分的几何意义

当积分常数  $C$  取不同值时, 不定积分表示的不是一个函数, 而是一族函数. 从几何上看, 它们代表一族曲线, 称为函数  $f(x)$  的**积分曲线族**, 如图 5-11 所示.

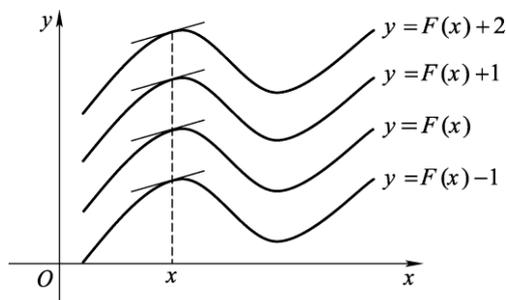


图 5-11

### 讲授新课

(22 min)

积分曲线族具有以下两个显著的特点:

- (1) 积分曲线族中所有的曲线都可以由其中任意一条曲线沿着  $y$  轴的方向上下平移得到;
- (2) 对应同一横坐标  $x$  的点, 其所有切线互相平行.

**【教师】** 介绍 13 个基本积分公式和不定积分的性质, 并通过例题讲解基本积分公式的运用

在导数知识的基础上, 我们可以利用积分与导数互为逆运算的性质得到以下一些常用的积分公式.

- (1)  $\int k dx = kx + C$ ;
- (2)  $\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} + C$  ( $n \neq -1$ );

学习不定积分的几何意义和性质, 基本积分公式及其应用。边做边讲, 及时巩固练习, 实现教学做一体化

- (3)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  ;
- (4)  $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$  ;
- (5)  $\int e^x dx = e^x + C$  ;
- (6)  $\int \cos x dx = \sin x + C$  ;
- (7)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$  ;
- (8)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$  ;
- (9)  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$  ;
- (10)  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$  ;
- (11)  $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$  ;
- (12)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$  ;
- (13)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$  .

注：以上 13 个公式为积分常用公式，请熟记。  
不定积分的性质如下：

(1) 被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0).$$

(2) 两个函数代数和的不定积分等于这两个函数不定积分的代数和，即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx .$$

性质(2)可以推广到任意有限多个函数代数和的情形。

**例 4** 求  $\int \left( x^2 + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$  .

**解** 
$$\int \left( x^2 + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \cos x - \arctan x + C .$$

**注意**

逐项积分后，每个不定积分都含有任意常数，由于任意常数之和仍为任意常数，因此只需最后加一个任意常数即可。

(例 5~例 11 详见教材)

	<p>【学生】理解不定积分的几何意义和性质，熟记 13 个基本积分公式，掌握基本积分公式的应用</p>	
<p><b>课堂测验</b> (10 min)</p>	<p>▣教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。 【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目</p>	<p>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</p>
<p><b>互助指导</b> (10 min)</p>	<p>▣选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点 【教师】公布题目的正确答案，每组指定一名答题准确率最高的同学，辅导本组的未答对同学掌握答题知识，实现组内互助 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</p>	<p>以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点</p>
<p><b>课堂小结</b> (3 min)</p>	<p>【教师】简要总结本节课的要点 本节课上大家理解了原函数和不定积分的概念，以及不定积分的几何意义，熟记了基本积分公式和不定积分的性质，并掌握了其应用，课后要多加练习，巩固认知 【学生】总结回顾知识点 【教师】布置课后作业：习题 5-2</p>	<p>总结知识点，巩固印象</p>
<p><b>课后拓展</b></p>	<p>【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接 【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务</p>	<p>延展知识面，多学科交叉学习</p>
<p><b>教学反思</b></p>	<p>本节课效果不错，激发了学生的学习兴趣，并引导学生进行探究。本节课中鼓励学生主动参与活动，使其获取了积极的体验，并让学生主动提出解决问题的途径，教师则扮演学生学习的组织者、参与者、帮助者、引导者和促进者，使学生真正成为学习的主体</p>	