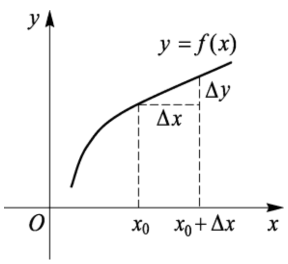
第 9 课　函数的连续性

课　题	函数的连续性	
课　时	2 课时（90 min）	
教学目标	（三维目标：知识与技能，过程与方法，情感价值观） 1．掌握连续函数的概念 2．能够判断函数的间断点以及间断点的分类 3．理解初等函数的连续性以及计算函数的连续区间 4．理解闭区间上连续函数的性质 5．掌握使用 MATLAB 求函数极限的方法 **思政育人目标：** 通过与实际现象联系，帮助学生理解函数的连续性，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的	
教学重难点	**教学重点：**函数在某点连续性的判断 **教学难点：**理解闭区间上连续函数的性质	
教学方法	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法	
教学用具	电脑、投影仪、多媒体课件、教材	
教学设计	**第一节课：课前任务→考勤（2 min）→复习（10 min）→讲授新课（33 min）** **第二节课：讲授新课（20 min）→课堂测验（10 min）→数学实验（12 min）→课堂小结（3 min）→课后拓展**	
教学过程	主 要 教 学 内 容 及 步 骤	设计意图
第一节课		
课前任务	【教师】和学生负责人取得联系，布置课前任务，提醒同学做完作业，在指定时间内交齐 【学生】做完作业，在指定时间内交齐 【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件，布置课前问答题： 自然界中有哪些连续变化的事物？ 【学生】查找资料，观察自然界中连续变化的事物	通过课前的预热，让学生了解所学科目的大概方向，激发学生的学习欲望

考勤 （2 分钟）	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习 （10 min）	【教师】提前设计好上节课的复习题目，并针对学生存在的问题及时讲解 【学生】做复习题目	复习上节课所学内容，为讲授新课打好基础
讲授新课 （33 min）	【教师】**通过现实生活中的现象，引入本节课的课题——函数的连续性** 在现实生活中许多变量都是连续变化的，如气温的变化、植物的生长、河水的流动、物体的热胀冷缩等，其特点是时间变化很小时，这些变量的变化也很小．变量的这种变化现象体现在数学上就是函数的连续性；反映在几何上，其图像就是一条连续不断的曲线．函数的连续性是与函数的极限密切相关的另一个基本概念． 【教师】**讲解函数的增量、函数连续的定义，并通过例题介绍利用所学定义判定函数在某点是否连续的方法** 1．函数的增量 自变量从初值 x_0 变为终值 x 时，终值与初值的差 $x-x_0$ 称为自变量 x 的**增量**（通常也称为**改变量**），记作 Δx．增量 Δx 可正可负． 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内有定义，当自变量 x 在该邻域内由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数的**增量**（或**改变量**），记作 Δy 或 $\Delta f(x)$，则有 $$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$ 函数增量的几何意义如图 2-8 所示．  图 2-8 2．函数连续的定义 **定义 1**　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某一邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处的改变量 Δx 趋于零时，相应地函数的改变量 Δy 也趋于零，即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$ 则称函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**． 在定义 1 中，若令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 即为 $x\to x_0$，	学习连续函数的概念，以及函数的间断点。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$\Delta y \to 0$ 即为 $f(x) \to f(x_0)$. 因此，函数在点 x_0 处的连续性也可按下列定义表述.

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的某一邻域内有定义，若当 $x \to x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的极限存在且等于函数在点 x_0 处的函数值，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ **在点 x_0 处连续**.

由函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左极限、右极限的定义，可以得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是左连续与右连续的定义.

定义 3 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是**左连续**. 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是**右连续**.

提示

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件就是函数在点 x_0 处既左连续又右连续. 该结论是讨论分段函数在分界点处是否连续的依据.

下面给出函数在区间上连续的定义.

定义 4 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内各点处均连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内**连续**. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 各点处内连续，且在 $x = a$ 处右连续，在 $x = b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上**连续**.

知识宝典

(1) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的几何意义是：函数 $y = f(x)$ 的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不断开；

(2) 函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续的几何意义是：函数 $y = f(x)$ 的图形在 (a, b) 内是一条连绵不断的曲线.

例 1 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leqslant 0, \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$，

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x+1) = 1$，且 $f(0) = 1$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to 0} f(0) = f(0) = 1$.

由定义可知，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

小贴士

根据连续函数的定义，通过上述例子，总结出 $f(x)$ 在点 x_0 处连续需满足下列三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义；

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

【教师】讲解间断点的定义，介绍初等函数和分段函数找间断点的方法，介绍间断点的分类情况

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若函数 $y=f(x)$ 有下列三种情形之一，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**不连续**或**间断**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**不连续点**或**间断点**.

（1）在 $x=x_0$ 处没定义；

（2）在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

例 2 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处间断. 但由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此若补充定义 $f(0)=1$，则得到函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 该函数在点 $x=0$ 处是连续的.

知识宝典

间断点的分类

设点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

（1）若左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 其中

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

（2）若左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 两者之中至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**. 其中，当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$ 为无穷大量，则这种类型的间断点也称为**无穷间断点**.

【学生】理解函数在某点连续的定义，能够判定函数在某点是否连续；理解间断点的定义，掌握初等函数和分段函数分别是如何找间断点的，掌握间断点的分类情况

第二节课

讲授新课 （20 min）	**【教师】讲解初等函数的连续性，并通过例题介绍函数的连续区间求法，以及利用连续求初等函数极限的方法** **定理 1** 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商（分母不等于 0）也都在点 x_0 处连续. **定理 2** 若函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处	学习初等函数的连续性，以及闭区间上连续函数的性质。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

连续．

上述定理也可表述为：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则

$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$．

这说明，在求连续函数的复合函数的极限时，极限符号可与函数符号交换次序．

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+5}$．

解 因为 $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2-2x+5$ 复合而成的，所以

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5)}=2.$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$．

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{\ln a}.$$

由连续和极限的定义容易证明，基本初等函数在其定义域内都是连续的．由于初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和有限次的函数复合构成的，因此我们可得到如下一个非常有用的结论．

定理 3 一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

提示

（1）初等函数的连续区间就是初等函数的定义区间．

（2）求初等函数在其定义域内某点处的极限时，只需求出函数在该点的函数值即可．

例 5 求函数 $y=\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{x^2-1}$ 的连续区间．

解 因为函数 $y=\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{x^2-1}$ 为初等函数，其定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，所以它的连续区间为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．

例 6 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(4-3x)}{\arctan x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{3x^2+\cos x^2+2}$．

解 （1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(4-3x)}{\arctan x}=\dfrac{1^2+\ln(4-3\times 1)}{\arctan 1}=\dfrac{4}{\pi}$．

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{3x^2+\cos x^2+2}=\dfrac{0^2+1}{3\times 0^2+\cos 0^2+2}=\dfrac{1}{3}$．

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

【教师】讲解闭区间上连续函数的性质，并通过例题介绍其应用

在闭区间上的连续函数有一些重要的性质，它们可以作为分析和论证某些问题的理论根据.

性质 1（最值定理） 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在该区间上必有最大值和最小值.

如图 2-9 所示，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ_1，使得 $f(x)$ 在点 ξ_1 处取最大值 M，至少有一点 ξ_2，使得 $f(x)$ 在点 ξ_2 处取最小值 m.

性质 2（介值定理） 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$，如图 2-10 所示.

性质 3（零点定理） 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

从几何意义上讲，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图形是一条连续曲线，其两个端点分别位于 x 轴两侧，那么这条曲线与 x 轴至少有一个交点，如图 2-11 所示.

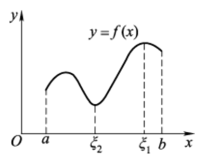


图 2-9

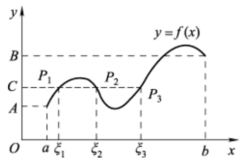


图 2-10

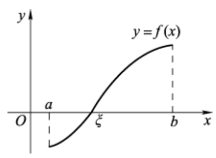


图 2-11

例 7 证明：方程 $x^3+2x=6$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

证明 设 $f(x)=x^3+2x-6$，则 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(3)=27>0$. 因此，由零点定理可知在 $(1,3)$ 内至少有一点 x_0，使 $f(x_0)=0$，即证方程 $x^3+2x=6$ 在 $(1,3)$ 内至少有一个根.

【学生】理解初等函数的连续性，掌握函数的连续区间求法，掌握利用连续求初等函数的极限；理解闭区间上连续函数的性质

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

课堂测验

（10 min）

</td>
<td>

☞教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。

【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况

【学生】做测试题目

【教师】公布正确答案，演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题

</td>
<td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td>
</tr>
</table>

技巧

数学实验

（12 min）

☞使用 MATLAB 进行数学实验

【教师】演示使用 MATLAB 求函数的极限

在利用 MATLAB 对函数求极限前，需要对函数中所涉及的变量进行定义．我们称函数中的变量为符号变量，可用 syms 函数对它们进行定义．syms 函数一次可以定义多个符号变量．例如，用 syms 函数定义 4 个符号变量 a，b，c，d，命令如下：

```
>> syms a b c d
```

在 MATLAB 中，极限的求解是由 limit 函数实现的，它可用来求函数在指定点的极限值和左、右极限值．对于极限值为“没有定义”的极限，MATLAB 给出的结果为 NaN；对于极限值为无穷大的极限，MATLAB 给出的结果为 Inf．limit 函数调用格式如表 2-2 所示．

表 2-2

数学运算	MATLAB 中 limit 函数调用格式	数学运算	MATLAB 中 limit 函数调用格式
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	limit(f,x,a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	limit(f,x,inf)
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	limit(f,x,a,'right')	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	limit(f,x,inf,'right')
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	limit(f,x,a,'left')	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	limit(f,x,inf,'left')

例 1　求函数的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$．

解　在命令窗口中输入

```
>> syms x                          %创建符号变量x
>> limit(sin(5*x)/x,x,0)           %计算符号表达式在x趋向0条件下的极限
ans =                              %计算结果的默认赋值变量
5
```

提示

MATLAB 中的“%”表示其后的语句为注释内容，注释内容不会被执行．

例 2　求函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$．

解　在命令窗口中输入

通过演示使用 MATLAB 进行数学实验的过程，使学生了解数学在实际中的应用

<table>
<tr><td></td><td>

```
>> syms x
>> limit((1+2/x)^x,x,inf)          %计算符号表达式在x趋于∞条件下的极限
ans =
exp(2)                             %输出结果为e^2
```

例 3 求函数的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.
解 在命令窗口中输入

```
>> syms x
>> limit((1-x)*tan(pi*x/2),x,1)    %计算符号表达式在x趋于1条件下的极限
ans =
2/pi                               %输出结果为2/π
```

【学生】观看、聆听、记录、思考</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂小结
（3 min）</td><td>【教师】简要总结本节课的要点
本节课上大家掌握了连续函数的概念、判断函数间断点的方法、间断点的分类，理解了初等函数的连续性，掌握了计算函数连续区间的方法，理解了闭区间上连续函数的性质，还学会了使用 MATLAB 求函数极限的方法，课后要多加练习，巩固认知
【学生】总结回顾知识点
【教师】布置课后作业：习题 2-4、复习题二、使用 MATLAB 求函数的极限</td><td>总结知识点，巩固印象</td></tr>
<tr><td>课后拓展</td><td>【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接
【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务</td><td>延展知识面，多学科交叉学习</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="2">本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯</td></tr>
</table>