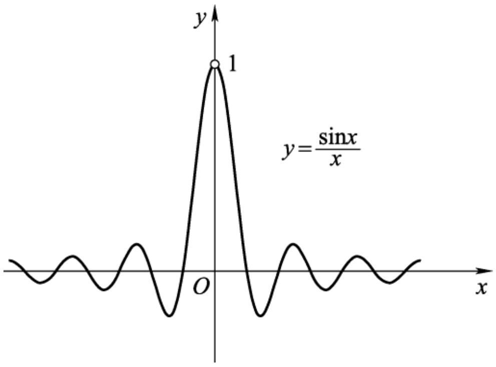
第 8 课　两个重要极限及无穷小的比较

<table>
<tr><td>课　题</td><td colspan="2">两个重要极限及无穷小的比较</td></tr>
<tr><td>课　时</td><td colspan="2">2 课时（90 min）</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="2">知识技能目标：
1．熟练掌握利用两个重要极限公式求极限
2．掌握两个无穷小的阶的比较
3．了解利用等价无穷小求极限
思政育人目标：
通过学习两个重要极限及无穷小的比较，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重难点</td><td colspan="2">教学重点：两个重要极限公式、无穷小量的比较、利用等价无穷小量求极限
教学难点：掌握利用两个重要极限公式求极限的方法</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="2">讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法</td></tr>
<tr><td>教学用具</td><td colspan="2">电脑、投影仪、多媒体课件、教材</td></tr>
<tr><td>教学设计</td><td colspan="2">第一节课：课前任务→考勤（2 min）→复习（10 min）→讲授新课（20 min）→课堂测验（6 min）→课堂指导（7 min）
第二节课：讲授新课（20 min）→课堂测验（10 min）→互助指导（12 min）→课堂小结（3 min）→课后拓展</td></tr>
<tr><td>教学过程</td><td>主 要 教 学 内 容 及 步 骤</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>课前任务</td><td>【教师】和学生负责人取得联系，布置课前任务，提醒同学做完作业，在上课前交齐
【学生】做完作业，在上课前交齐
【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件，布置课前任务：
（1）复习无穷小量、无穷大量的定义；
（2）预习两个重要极限；
（3）预习无穷小量的比较
【学生】提前上网搜索了解，查阅资料，了解问题，熟悉教材</td><td>通过课前的预热，让学生了解所学科目的大概方向，激发学生的学习欲望</td></tr>
<tr><td>考勤
（2 min）</td><td>【教师】清点上课人数，记录好考勤
【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
</table>

复习 （10 min）	【教师】提前设计好上节课的复习题目，并针对学生存在的问题及时讲解 【学生】做复习题目	复习上节课所学内容，为讲授新课打好基础
讲授新课 （20 min）	**【教师】通过观察函数图像，推导出极限公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，并通过例题介绍使用该公式求函数极限的方法** 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像如图 2-7 所示，从图像可以看出，当 $x\to 0$ 时，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋近于 1.  图 2-7 此重要极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，常形象地表示为 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$（□代表同一变量）. 例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. 解　令 $u=3x$，则 $x=\dfrac{u}{3}$．当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$．于是有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{\frac{u}{3}}=3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=3$. 注意 函数 $\dfrac{\sin 3x}{x}$ 通过变量替换成为 $\dfrac{\sin u}{u}$ 时，极限中的 $x\to 0$ 同时要变为 $u\to 0$．也可以直接计算，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3$. 例 2　求下列极限： （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.	学习两个重要极限。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

解　（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot3x}{\dfrac{\sin5x}{5x}\cdot5x}=\dfrac{3}{5}\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}}=\dfrac{3}{5}$.

（2）

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\times1=1.$$

（3）

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

【教师】通过函数的变化趋势推导出极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，并通过例题介绍使用该公式求函数极限的方法

当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势如表 2-1 所示.

表 2-1

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	$\cdots\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	$\cdots\to\mathrm{e}$
x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	−1 000 000	$\cdots\to-\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 42	2.718 30	2.718 28	$\cdots\to\mathrm{e}$

从表 2-1 中可以看出，当 $x\to-\infty$ 及 $x\to+\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$．若令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$．因此，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 还可以写成 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

此重要极限属于 1^∞ 型，常形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\ \text{或}\ \lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}\ （\square\text{代表同一变量}）.$$

例 3　求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解　（1）令 $\dfrac{x}{3}=u$，则 $x=3u$．于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^3=\mathrm{e}^3.$$

	（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\times(-1)}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$. **拓展应用** 第二个重要极限可应用在经济学中的连续复利计算方面. 设本金为 P_0，计息期（如一年）的利率为 r，若每个计息期结算 n 次，则 m 个计息期的本利和为 $$P=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{mn}.$$ 在计息期一定时，通常结算周期越短获利越多．若结算周期无限缩短，也就是连续复利（即期数 $n\to\infty$），则第 m 年末的本利和尽管会不断增大，但最后将稳定趋近于一个固定的数，即 $$P=\lim\limits_{n\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{mn}=\lim\limits_{n\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}\times mr}=P_0\mathrm{e}^{mr}.$$ **例 4**　设有本金 10 000 元，年利率为 6%，计息期为五年，分别计算下列情况的本利和： （1）单利计息（五年结算一次）； （2）复利计息（3 个月结算一次）； （3）连续复利计息. **解**　（1）单利计息（五年结算一次）时本利和为 $$P=10\,000\times(1+6\%\times 5)=13\,000$$（元）. （2）复利计息（3 个月结算一次）时本利和为 $$P=10\,000\times\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{5\times 4}\approx 13\,468.55$$（元）. （3）连续复利计息时本利和为 $$P=10\,000\mathrm{e}^{5\times 0.06}\approx 13\,498.59$$（元）. 【学生】熟练运用两个重要极限公式求函数的极限	
课堂测验 （6 min）	**☞教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。** 【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂指导 （7 min）	**☞选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点** 【教师】公布题目的正确答案，让答题快且正确的同学上台解答，为同学们做示范。如果题目比较难，无人答对则老师示范 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点
第二节课		
讲授新课 （20 min）	【教师】**讲解无穷小量的比较方法，以及利用等价无穷小求极限的方法** 我们已经知道，两个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量，但两个无穷小量的商却不一定是无穷小量. 例如，当 $x\to 0$ 时，x，$3x^2$，$2x$，$\sin x$ 都是无穷小量，但两	学习无穷小量的比较方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

个无穷小量的商却会出现不同的情况，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小量比值极限的不同，反映了不同无穷小量趋于零的速度差异.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x}=0$，说明当 $x\to 0$ 时，$3x^2\to 0$ 的速度比 $x\to 0$ 要快；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x^2}=\infty$，说明当 $x\to 0$ 时，$x\to 0$ 的速度比 $3x^2\to 0$ 要慢；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$，说明当 $x\to 0$ 时，$2x\to 0$ 与 $x\to 0$ 的速度相当；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，说明当 $x\to 0$ 时，$\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$ 的速度相同.

由上可知，可以用两个无穷小量商的极限来比较它们趋于零的快慢，为此引入如下定义.

定义　设 α,β 是自变量的同一变化过程中（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）的无穷小量，且 $\alpha\neq 0$.

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta=o(\alpha)$；

（2）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶的无穷小**；

（3）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是**同阶无穷小**；

（4）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是**等价无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$.

例如，当 $x\to 0$ 时，x^3+2x 与 x 都是无穷小量．因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)=2\neq 0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^3+2x 与 x 是同阶无穷小量.

等价无穷小在求极限时有重要的作用．对此，有如下定理.

定理　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

这说明，在求两个无穷小量之比的极限时，分子、分母可分别用它们的等价无穷小来代替，这样可以简化某些极限的运算．因此，我们应该记住以下几个常用的等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

	$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$， $\ln(1+x) \sim x$， $e^x - 1 \sim x$. **例 5** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3-4x}$. **解** 当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$，无穷小 x^3-4x 与它本身显然是等价的，所以 $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2-4}=-\frac{1}{4}.$$ **例 6** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$. **解** 当 $x\to 0$ 时， $\sin x \sim x$， $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，所以 $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$ **注意** 在利用等价无穷小量代换求极限时，只有所求极限式中相乘或相除的无穷小量才能用等价无穷小量来替代，而所求极限式中的相加或相减的无穷小量则不能随意替代．例如，在例 6 中，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 中 $\tan x$ 和 $\sin x$ 直接用其等价无穷小量替换，则得到错误结果． 【学生】弄清无穷小量比较的方法（高阶、低阶、同阶和等价），了解利用等价无穷小求极限的方法	
课堂测验 （10 min）	☞**教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。** 【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
互助指导 （12 min）	☞**选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点** 【教师】公布题目的正确答案，每组指定一名答题准确率最高的同学，辅导本组的未答对同学掌握答题知识，实现组内互助 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点
课堂小结 （3 min）	【教师】简要总结本节课的要点 本节课上大家掌握了利用两个重要极限公式求极限的方法、无穷小量的比较方法，以及利用等价无穷小求极限的方法，课后要多加练习，巩固认知 【学生】总结回顾知识点 【教师】布置课后作业：习题 2-3	总结知识点，巩固印象

课后拓展	【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接 【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务	延展知识面，多学科交叉学习
教学反思	本节课效果不错，学生积极提问与老师交流。在课堂教学中，教师的作用是不能忽视的，教师主动由“站在讲台上”，变为“走到学生中去”，使自己成为学生中的一员，与学生共同探讨学习中的问题，以交流、合作、商讨的口气与学生交流心得、体会，这样学生会亲其师，信其道。遇到什么问题都愿意与老师讲	