第 3 课　方程与不等式

课　题	方程与不等式	
课　时	2 课时（90 min）	
教学目标	**知识技能目标：** 1. 掌握直线方程的建立方法 2. 掌握一元二次方程的解法 3. 掌握不等式的相关概念、基本性质、类型和解法 **思政育人目标：** 通过学习方程与不等式的相关知识，引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神	
教学重难点	**教学重点：**直线方程、一元二次方程、不等式 **教学难点：**直线方程的建立方法、一元二次方程的解法、不等式的解法	
教学方法	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法	
教学用具	电脑、投影仪、多媒体课件、教材	
教学设计	**第一节课：课前任务→考勤（2 min）→知识讲解（20 min）→课堂测验（10 min）→课堂指导（13 min）** **第二节课：知识讲解（20 min）→课堂测验（12 min）→互助指导（10 min）→课堂小结（3 min）→课后拓展**	
教学过程	主 要 教 学 内 容 及 步 骤	设计意图
	第一节课	
课前任务	【教师】和学生负责人取得联系，布置课前任务，提醒同学做完作业，在指定时间内交齐 【学生】做完作业，在指定时间内交齐 【教师】通过文旌课堂 APP 或其他学习软件，布置课前问答题： 什么是直线方程？直线方程有几种类型？什么是一元二次方程？一元二次方程的常用解法有哪些？什么是不等式？其基本性质是什么？ 【学生】提前上网搜索了解，查阅资料，了解问题，熟悉教材	通过课前的预热，让学生了解所学科目的大概方向，激发学生的学习欲望
考勤 （2 min）	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况

知识讲解

（20 min）

【教师】和学生一起复习、总结直线方程的建立方法（点斜式、截距式、两点式等），并通过例题介绍其应用

我们知道，一次函数 $y=x+2$ 的图像是一条直线 l，其解析式 $y=x+2$ 可以看作一个关于 x,y 的二元一次方程，直线 l 上的任意一点 (x,y) 都满足方程 $y=x+2$．此时，我们把方程 $y=x+2$ 称为**直线 l 的方程**.

1）直线的点斜式方程

如图 1-1 所示，已知直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k．设点 $P(x,y)$ 为直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，由斜率公式可得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

整理得

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

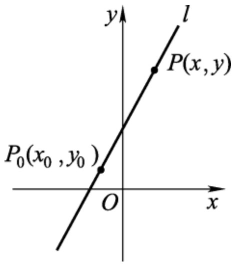


图 1-1

显然，点 $P_0(x_0,y_0)$ 也满足上述方程．由于上述方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的，因此称为**直线的点斜式方程**.

2）直线的斜截式方程

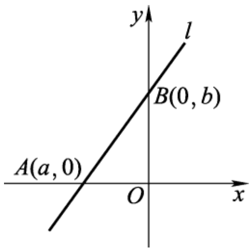


图 1-2

如图 1-2 所示，设直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，则 a 称为直线 l 在 x 轴上的**截距**（或**横截距**），b 称为直线 l 在 y 轴上的**截距**（或纵截距）.

设直线 l 与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，且直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

由于上述方程是由直线的斜率和在 y 轴上的截距确定的，因此称为**直线的斜截式方程**.

例 3　某直线过点 $A(-3,0)$，且在 y 轴上的截距为 -2．试写出该直线的方程.

解　因为直线在 y 轴上的截距为 -2，即过点 $(0,-2)$，又因直线过点 $A(-3,0)$，所以直线的斜率为

$$k=\frac{-2-0}{0+3}=-\frac{2}{3}.$$

因此，所求直线的方程为

$$y=-\frac{2}{3}x-2.$$

3）直线的一般式方程

我们把形如 $Ax+By+C=0$（A,B 不全为零）的二元一次方程称为**直线的一般式方程**.

通过复习使同学熟悉直线方程和一元二次方程的相关知识及其解法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

例 4　将方程 $y-1=2(x-3)$ 化为直线的一般式方程，并分别求出该直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

解　由 $y-1=2(x-3)$ 可得直线的一般式方程为

$$2x-y-5=0.$$

在一般式方程中，令 $y=0$，则 $x=\frac{5}{2}$，故直线在 x 轴上的截距为 $\frac{5}{2}$；令 $x=0$，则 $y=-5$，故直线在 y 轴上的截距为 -5.

例 5　已知直线 l 经过点 $A(4,2)$，斜率为 -3，求直线 l 的点斜式方程、斜截式方程和一般式方程.

解　因为直线 l 经过点 $A(4,2)$，斜率为 -3，所以其点斜式方程为

$$y-2=-3(x-4).$$

将上述方程变形后可得直线的斜截式方程

$$y=-3x+14.$$

将斜截式方程移项后可得直线的一般式方程

$$3x+y-14=0.$$

【教师】**和学生一起复习、总结一元二次方程常用的解法（公式法、十字相乘等），并通过例题介绍其应用**

等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，称为**一元二次方程**．一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$．求解一元二次方程的方法主要有公式法和因式分解法两种.

1）公式法

一般地，式子 b^2-4ac 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的**判别式**，通常用希腊字母“$\varDelta$”表示，即 $\varDelta=b^2-4ac$．当 $\varDelta\ldots 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的实数根可写为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**．求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果．解一个具体的一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式即可．这种解一元二次方程的方法称为**公式法**.

例 6　用公式法解下列方程：

（1）$x^2-4x-7=0$；

（2）$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

解　（1）由方程可得 $a=1$，$b=-4$，$c=-7$，于是有

$$\varDelta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times(-7)=44>0.$$

因此，方程有两个不等的实数根：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{44}}{2\times 1}=2\pm\sqrt{11},$$

即 $x_1=2+\sqrt{11}$，$x_2=2-\sqrt{11}$.

（2）由方程可得 $a=2$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=1$，于是有

$$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1=0.$$

因此，方程有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2）因式分解法

引例 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛，那么物体经过 x（单位：s）后离地面的高度（单位：m）为

$$10x-4.9x^2.$$

根据上述规律，物体经过多长时间后落回地面？（结果保留小数点后两位）

设物体经过 x 后落回地面，这时它离地面的高度为 0 m，即

$$10x-4.9x^2=0.$$

此方程的左边可以因式分解，得

$$x(10-4.9x)=0.$$

这个方程的左边是两个一次因式的乘积，右边是 0．我们知道，如果两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反之，如果两个因式中任何一个为 0，那么它们的积等于 0．所以

$$x=0\ \text{或}\ 10-4.9x=0.$$

于是，方程的两个根为

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{100}{49}\approx 2.04.$$

这两个根中，$x_2\approx 2.04$ 表示物体约在 2.04 s 时落回地面，而 $x_1=0$ 表示物体被上抛或离开地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m.

可以发现，上述解法中，先因式分解，使方程化为两个一次因式乘积等于 0 的形式，再使这两个一次因式分别等于 0，从而实现降次．这种解一元二次方程的方法称为**因式分解法**.

因式分解法是求解一元二次方程常用的方法，因式分解法灵活多样、技巧性强，其应用较为普遍的方法是十字相乘法．通过因式分解法，将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 转化为两个一次因式乘积等于 0 的形式，即形如 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0$，再令两个一次因式分别等于 0，从而求出一元二次方程的根.

例 7 解下列方程：

<table>
<tr><td></td><td>（1）$x(x-2)+x-2=0$；（2）$5x^2-2x-\frac{1}{4}=x^2-2x+\frac{3}{4}$.
解　（1）方程的左边因式分解，得
$$(x-2)(x+1)=0,$$
因此，方程的两个根分别为
$$x_1=2,\quad x_2=-1.$$
（2）对方程先移项，再合并同类项，得
$$4x^2-1=0.$$
方程的左边因式分解，得
$$(2x+1)(2x-1)=0,$$
因此，方程的两个根分别为
$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1}{2}.$$
【学生】掌握直线方程的建立方法，以及一元二次方程常用的解法</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂测验
（10 min）</td><td>☞教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。
【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况
【学生】做测试题目</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td>课堂指导
（13 min）</td><td>☞选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点
【教师】公布题目的正确答案，让答题快且正确的同学上台解答，为同学们做示范。如果题目比较难，无人答对则老师示范
【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解
（20 min）</td><td>【教师】和学生一起复习、总结不等式的概念及基本性质，并通过例题介绍其应用
现实世界中存在着两种基本数量关系，一种是相等关系，另一种是不等关系．用不等号（＞，＜，…，„，≠）表示不等关系的式子称为不等式．不等式在数学研究和数学应用中起着重要的作用．
不等式具有三条基本性质，分别为传递性、加法性质和乘法性质．
性质 1（传递性）　若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$．
性质 2（加法性质）　若 $a>b$，则 $a+c>b+c$．
性质 3（乘法性质）　若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$．
例 8　某工人要在规定的时间内加工 400 个零件，若</td><td>通过复习使同学熟悉不等式的相关知识及其解法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

他每小时加工 50 个，则可按时完成任务．但当他加工 3 个小时后，因有事停工了 50 分钟，而后继续加工零件．问为了能够按时或提前完成任务，该工人在以后的时间内平均每小时至少要加工多少个零件？

解　设该工人在以后的时间内平均每小时至少要加工 x 个零件，根据题意得

$$50\times3+\left(\frac{400}{50}-3-\frac{50}{60}\right)x\geqslant400,$$

于是

$$\frac{25}{6}x\geqslant250,$$

即

$$x\geqslant60.$$

因此，该工人在以后的时间内平均每小时至少要加工 60 个零件．

像例 8 中这样，用不等号连接，含有一个未知数，并且未知数的次数是 1，系数不为 0，左右两边为整式的式子称为**一元一次不等式**．

【教师】和学生一起复习、总结含有绝对值的不等式，并通过例题介绍其应用

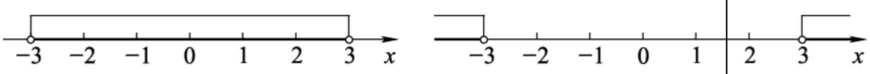
1）$|x|<a$ 或 $|x|>a$ 型不等式

我们知道，对于任意实数 x，都有 $|x|\geqslant0$，并且

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\0, & x=0,\\-x, & x<0.\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义为：数轴上表示实数 x 的点到原点 O 的距离．

由绝对值的几何意义可知，不等式 $|x|<3$ 表示的是数轴上到原点的距离小于 3 的所有点的集合，如图 1-5（a）所示；不等式 $|x|>3$ 表示的是数轴上到原点的距离大于 3 的所有点的集合，如图 1-5（b）所示．



（a）　　（b）

图 1-5

由图 1-5 可知，不等式 $|x|<3$ 的解集为 $(-3,3)$；不等式 $|x|>3$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$．

一般地，不等式 $|x|<a\ (a>0)$ 的解集为 $(-a,a)$；不等式 $|x|>a\ (a>0)$ 的解集是 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$．

例 9　解下列各不等式：

（1）$2|x|-3<0$；　（2）$5|x|\geqslant10$．

解　（1）由不等式 $2|x|-3<0$，得 $|x|<\frac{3}{2}$，故原不等

式的解集为$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

（2）由不等式$5|x|\ldots 10$，得$|x|\ldots 2$，故原不等式的解集为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

2）$|ax+b|<c$ 或 $|ax+b|>c$ 型不等式

对于$|ax+b|<c$或$|ax+b|>c$ $(c>0)$型不等式，可以把$ax+b$看成一个整体，从而将该不等式转化为$|x|<a$或$|x|>a$ $(a>0)$型不等式来求解.

例如，求解不等式$|2x-3|<1$时，可先设$m=2x-3$，则不等式$|2x-3|<1$化为

$$|m|<1,$$

其解集为

$$-1<m<1，即 -1<2x-3<1.$$

根据不等式的性质，可以求出$1<x<2$，即原不等式$|2x-3|<1$的解集为$(1,2)$.

上述这种求解不等式的方法称为**变量替换法**或**换元法**，其基本思想是用新的变量替换原来的变量，如上述m表示代数式$2x-3$，从而使某些复杂的数学求解问题简单化.

例 10 解不等式$|2x+1|,, 7$.

解 由原不等式可得 -7剟$2x+1\quad 7$，

于是 -8剟$2x\quad 6$，

即 -4剟$x\quad 3$，

所以原不等式的解集为$[-4,3]$.

【教师】和学生一起复习、总结区间的概念

不等式的解集是数集，对应着数轴上的一条或多条线段，也就是说它们是数轴的一部分．为了应用的方便，我们引入“区间”的概念.

1）有限区间

实数与数轴上的点之间是一一对应的关系，例如，集合$\{x|-3<x<2\}$可以用数轴上位于-3与2之间的一条线段（不包括端点）来表示，如图 1-6 所示.

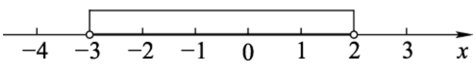


图 1-6

由数轴上两点之间的全部实数所组成的集合称为**区间**，其中这两个点称为**区间端点**．不含端点的区间称为**开区间**，含有两个端点的区间称为**闭区间**.

如图 1-6 中，集合$\{x|-3<x<2\}$表示的就是开区间，记作$(-3,2)$．如图 1-7 中，集合$\{x|-3$剟$x\quad 2\}$表示的就

是闭区间，记作$[-3,2]$.

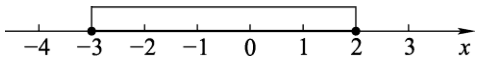


图 1-7

只含左端点的区间称为**右半开区间**，如集合$\{x|-3\leqslant x<2\}$表示的区间就是右半开区间，记作$[-3,2)$；只含右端点的区间称为**左半开区间**，如集合$\{x|-3<x\leqslant 2\}$表示的区间就是左半开区间，记作$(-3,2]$.

综上所述，设a,b为任意实数，且$a<b$，则有

（1）**开区间**：数集$\{x|a<x<b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间(a,b)；

（2）**闭区间**：数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$[a,b]$；

（3）**右半开区间**：数集$\{x|a\leqslant x<b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$[a,b)$；

（4）**左半开区间**：数集$\{x|a<x\leqslant b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$(a,b]$.

以上介绍的开区间、闭区间、右半开区间和左半开区间统称为**有限区间**.

2）无限区间

集合$\{x|x>3\}$可以用数轴上位于 3 右侧的一条射线（不包括端点）来表示，如图 1-8 所示.

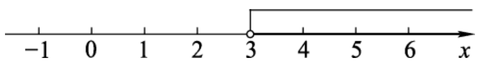


图 1-8

由图可以看出，集合$\{x|x>3\}$所表示的区间的左端点为 3，没有右端点，这时可以将其记作$(3,+\infty)$，其中符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，表示右端点可以任意大，而并非某个具体的数.

同理，集合$\{x|x<5\}$表示的区间可记作$(-\infty,5)$，其中符号“$-\infty$”读作“负无穷大”.

类似地，集合$\{x|x\geqslant 3\}$表示的区间记作$[3,+\infty)$，是右半开区间；集合$\{x|x\leqslant 5\}$表示的区间记作$(-\infty,5]$，是左半开区间.

综上所述，设a，b为任意实数，且$a<b$，则有

（1） 数集$\{x|x>a\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$(a,+\infty)$；

（2） 数集$\{x|x<b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$(-\infty,b)$；

（3） 数集$\{x|x\geqslant a\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$[a,+\infty)$；

（4） 数集$\{x|x\leqslant b\}$ $\Leftrightarrow$ 区间$(-\infty,b]$；

（5）如果实数集 **R** 用区间来表示，那么可以将其记作$(-\infty,+\infty)$.

以上这 5 种区间统称为**无限区间**.

相比而言，有些集合用区间来表示，更为方便、简单.

【教师】和学生一起复习、总结邻域的概念

设点 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则称集合 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，如图 1-9 所示．其中 a 称为邻域中心，δ 称为邻域半径.

有时还会用到去掉中心的邻域，即集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$，称其为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，如图 1-10 所示.

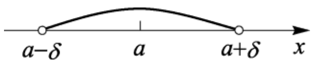


图 1-9

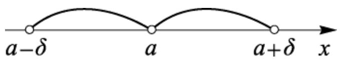


图 1-10

【教师】和学生一起复习、总结一元二次不等式，并通过例题介绍其应用

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式，称为**一元二次不等式**，其一般形式为

$$ax^2+bx+c>(\ldots)0 \quad 或 \quad ax^2+bx+c<(,,)0 \quad (a\neq 0).$$

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$，它的解可以按照判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，$\Delta=b^2-4ac=0$，$\Delta=b^2-4ac<0$ 三种情况来求．下面，我们按照这三种情况分别讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0\,(a>0)$ 的解集.

（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$ 有两个不相等的实数解 x_1 和 x_2（$x_1<x_2$），对应函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 的图像与 x 轴有两个交点，即 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，如图 1-11（a）所示．此时不等式 $ax^2+bx+c>0\,(a>0)$ 的解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$，不等式 $ax^2+bx+c<0\,(a>0)$ 的解集为 (x_1,x_2).

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0\;(a>0)$ 有两个相等的实数解 x_0，对应函数 $y=ax^2+bx+c\;(a>0)$ 的图像与 x 轴只有一个交点，即 $(x_0,0)$，如图 1-11（b）所示．此时不等式 $ax^2+bx+c>0\;(a>0)$ 的解集为 $(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$，不等式 $ax^2+bx+c<0\;(a>0)$ 的解集为 $\varnothing$.

（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0\;(a>0)$ 没有实数解，对应函数 $y=ax^2+bx+c\;(a>0)$ 的图像与 x 轴没有交点，如图 1-11（c）所示．此时不等式 $ax^2+bx+c>0\;(a>0)$ 的解集为 $\mathbf{R}$，不等式 $ax^2+bx+c<0\;(a>0)$ 的解集为 $\varnothing$.

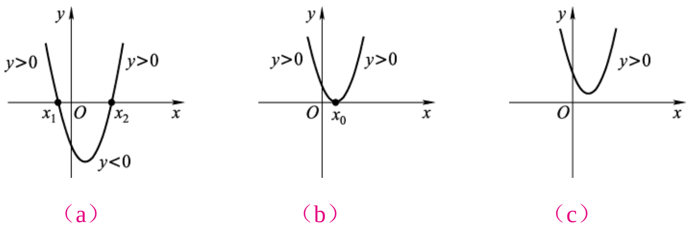
<table>
<tr><td></td><td>

图 1-11

例 11　k 为何值时，方程 $2x^2-kx+x+8=0$ 无实数解.
解　$2x^2-kx+x+8=0$ 可化为 $2x^2+(1-k)x+8=0$. 依题意知，此方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$，即
$(1-k)^2-4\times2\times8<0$，
$1-2k+k^2-64<0$，
$k^2-2k-63<0$.
因此，需要解不等式 $k^2-2k-63<0$. 解方程 $k^2-2k-63=0$ 得
$k_1=-7$，$k_2=9$.
由于二次项系数为 $1>0$，所以不等式的解集为 $(-7,9)$，即当 $k\in(-7,9)$ 时，方程 $2x^2-kx+x+8=0$ 无实数解.
【学生】掌握不等式的相关知识及其解法</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂测验
（12 min）</td><td>☞教师在文旌课堂 APP 或其他学习平台中发布测试的题目，并让学生加入测试。
【教师】从教材配套题库中选择几道题目，测试一下大家的学习情况
【学生】做测试题目</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td>互助指导
（10 min）</td><td>☞选出优秀学生带动、指导其他同学掌握知识点
【教师】公布题目的正确答案，每组指定一名答题准确率最高的同学，辅导本组的未答对同学掌握答题知识，实现组内互助
【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>以学生为主体，针对学生接受能力的差异性，让优秀学生带动其他学生掌握知识点</td></tr>
<tr><td>课堂小结
（3 min）</td><td>【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了直线方程的建立方法，一元二次方程的解法，以及不等式的相关概念、基本性质、类型和解法
【学生】总结回顾知识点</td><td>总结知识点，巩固印象</td></tr>
</table>

	【教师】布置课后作业：习题 1-1 中的第 4~11 题	
课后拓展	【教师】在文旌课堂 APP 或其他学习平台上共享本节课知识相关的学习链接 【学生】登录文旌课堂 APP 或其他学习平台查看相关知识链接，完成课后任务	延展知识面，多学科交叉学习
教学反思	学生在互帮互助以及评价过程中能够反省自己的学习情况，取长补短。教师在高职数学教学中要针对每个层次的学生进行多样化的评价，促使每个学生都能得到积极的评价，从而帮助他们树立起学习的信心和动力	