漫话数学

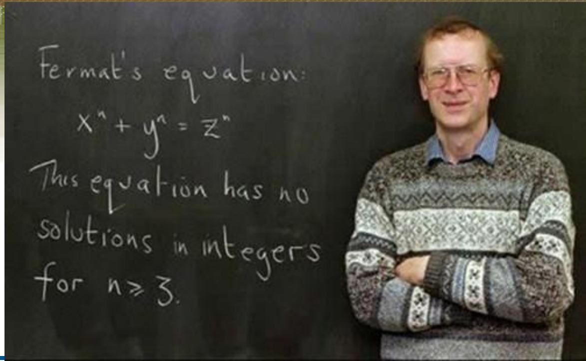
应用数学

应用数学

应用数学

纪录片《费马大定理》

主讲：卜宪敏



读后感：《费马大定理》
一个困惑了世间智者358年的谜

从表面上看，这似乎只是一本数学方面的科普著作。但作者在结构安排上，颇具巧思，以至于在很大程度上写成了一本数学史的入门读物。因为费马大定理虽然显得很独特，但它并不是横空出世，总要有它的来龙去脉。为此作者从古希腊的毕达哥拉斯定理说起，娓娓道来。每一个重要的概念、每一个阶段性成果，都成为作者讲述数学知识的契机。书中两条线索相互交织，一条是怀尔斯的成长和工作进程，一条是与费马大定理有联系的各种数学知识。

本书作者作者是剑桥大学的物理学博士，又是媒体从业人员，因此很能把握读者心理，讲数学知识时总能“见好就收”，不使读者出现厌倦之感。与此同时，各种用来吸引读者的花絮却层出不穷。

这是一本值得科学爱好者和科普工作者阅读的书。

业余数学家之王

- 费尔玛(Fermat,1601—1665),法国数学家，他非常喜欢数学，常常利用业余时间研究高深的数学问题，结果取得了很大的成就，被人称為“业余数学家之王”
- 费马凭借丰富的想像力和深刻的洞察力，提出一系列重要的数学猜想

费尔马小猜想

- 1640年，费尔马在研究质数性质时，发现了一个有趣的现象：
- 当n=1时，$2^{2^n}+1=2^{2^1}+1=5$；
- 当n=2时，$2^{2^n}+1=2^{2^2}+1=17$；
- 当n=3时，$2^{2^n}+1=2^{2^3}+1=257$；
- 当n=4时，$2^{2^n}+1=2^{2^4}+1=65537$；
- 猜测：只要n是自然数，　$2^{2^n}+1$一定是质数
- 1732年，欧拉进行了否定

费尔马小猜想

- 如果P是一个质数，那么对于任何自然数n，n^P-n一定能够被P整除
- 这个猜想已证明是正确的，这个猜想被称为“费马小定理”
- 利用费马小定理，是目前最有效的鉴定质数的方法

费尔马大定理

- 1637年前后，费马在《算术》这本书的靠近问题8的页边处记下这样一个结论（现在的写法）：

  如果$n>2$，则方程$x^n+y^n=z^n$没有非零整数解

- 同时又写下一个附加的评注：“对于该命题，我确信已发现一种奇妙的证明，可惜这里的空白太小，写不下”

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

LVTETIAE PARISIORVM,

M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Pierre de Fermat
1601-1665

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,

Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.

M. DC. LXX.

intervallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis unitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

[illegible]

IN QVÆSTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quam ut quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit ut 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quot continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur unitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur utrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter vero $\frac{144}{25}$. & utriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & uterque quadratus est.

[illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius vero quotcunque numerorum cum defectu tot unitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo utrumque simul æquari unitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur unitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

[illegible]

Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere;

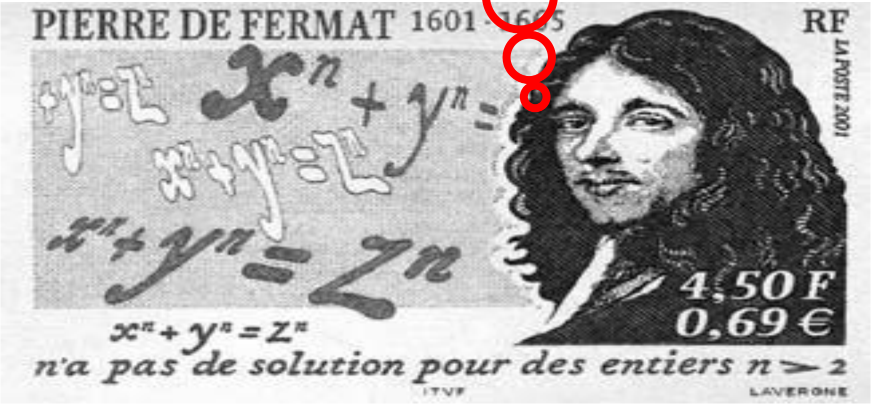
不可能将一个立方数写成两个立方数之和；或者将一个四次幂与成两个四次幂之和；或者，一般地，不可能将一个高于2次的幂写成两个同样次幂的和。

Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detex hanc marginis exiguitas non caparet.

对于该命题，我确信已发现一种奇妙的证明，可惜这里的空白太小，写不下。

这是真的
（1994年）

$x^n + y^n = z^n$,
$(n > 2)$
无整数解
（1637年）



费马大定理产生的历史性背景

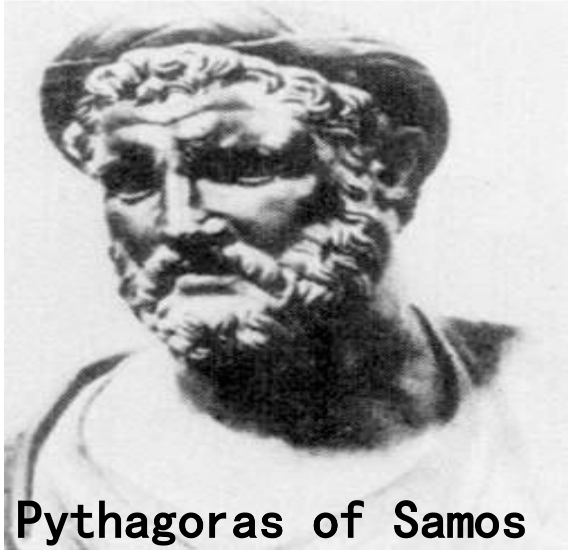
费尔马大定理，启源于两千多年前，挑战人类三个多世纪，多次震惊全世界，耗尽人类最杰出大脑的精力，也让千千万万业余者痴迷

古希腊，丢番图《算术》第II卷第八命题：

“将一个平方数分为两个平方数”

即求方程$x^2 + y^2 = z^2$ 的正整数解

毕达哥拉斯定理：在直角三角形中，斜边的平方等于两直角边的平方之和。$x^2 + y^2 = z^2$



Pythagoras of Samos

B. C. 572 - B. C. 497

万物皆数

不定方程：是指未知数个数多于方程个数的代数方程或代数方程组。

上帝恩赐他生命的1/6为童年；再过生命的1/12，他双颊长出了胡子；再过1/7后他举行了婚礼；婚后5年他有了一个儿子。不幸的孩子只活到父亲生命的一半年龄；他以研究数论寄托自己的哀思，4年之后亦撒手人寰。**——丢番图的墓志铭**

$$L=\frac{1}{6}L+\frac{1}{12}L+\frac{1}{7}L+5+\frac{1}{2}L+4$$

$$L = 84$$

Diophantus of Alexandria B.C150-A.D.364

费马猜想及其证明

不可能将一个立方数写成两个立方数之和；或者将一个四次幂与成两个四次幂之和；或者，一般地，不可能将一个高于2次的幂写成两个同样次幂的和。

附加的评注：

“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，写不下。”

两个问题

（1）为什么费马猜想叫做费马定理呢？

因为经过三百多年，都没有人能作出反例，所以人们相信是它是正确的，是一个定理。

（2）费马提出这命题后三十年才去世，为什么会把这个命题做“费马最后定理”呢？

因为费马曾经提出过的命题，都已经被证实或否定，只剩下这一题，未能获证。

N = 4的证明

- 费马在给朋友的信中，曾经提及他已证明了 n = 4 的情况。但没有写出详细的证明步骤
- 1674 年，贝西在少量提示下，给出这个情形的证明
- 证明步骤主要使用了“无穷递降法”

再进一步

- 欧拉1770年提出n=3的证明

- $x^n + y^n = z^n$，当$n=3$，4时无整数解

欧拉的策略：

证明某结论对于简单情形成立，再证明任何使情形复杂化的操作都将继续保持该结论的正确性。

Leonhard Euler, 1707-1783

无穷递降法：

假设某结论对于某正整数成立，那么，可以求出或构造出更小的正整数使得该结论对于该更小整数也成立。……，无限地进行下去，就可得到一个无穷正整数列，而正整数是有限数，故假设不成立。

$$(X_1, Y_1, Z_1) > (X_2, Y_2, Z_2) > \cdots > (X_k, Y_k, Z_k) > \cdots$$

无穷递降法的精神一直到现在都在用，这就是**高度理论**，或称**高度有限性理论**。

若$x^k + y^k = z^k$ 无正整数解，

则$x^{mk} + y^{mk} = z^{mk}$也无正整数解。

为证明费马大定理对n 的一切值成立，我们仅仅需要证明它在n 取素数值时成立。

数学家们认为素数是最重要的数，因为它们是数学中的“原子”。素数是数的建筑材料，因为所有别的数都可以由若干个素数相乘而得。

N = 5 的证明

勒让德 Legendre（1752 – 1833）

- 法国人
- 1823 年，证明了 $n = 5$

狄利克雷 Dirichlet（1805 – 1859）

- 德国人
- 1828 年，独立证明了 $n = 5$
- 1832 年，解决了 $n = 14$ 的情况

新的方向

Sophie Germain
1770-1831

- 索非·热尔曼，法国数学家
- **热尔曼素数：** 使$2p+1$为素数的那些素数p
- **热尔曼定理：** 当p和$2p+1$皆为素数时$x^p+y^p=z^p$无整数解
- **热尔曼初步完成了** $n=5$的证明

N = 7 的证明

拉梅 Gabriel Lamé

(1795 - 1870)

- 法国人
- 1839年，证明了n = 7

3月1日，拉梅宣布他已证明了“费马最后定理”：

拉梅将x^n+y^n分解成$(x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1} y)$其中$\zeta=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$，即方程 $r^n=1$的复根

如果$x^n+y^n=z^n$，那么拉梅认为每一个（$x+\zeta^k y$）都会是n次幂乘以一个单位，从而可导出矛盾

但是，拉梅的好友刘维尔Liouville指出，拉梅的证明中有很大的漏洞

拉梅忽略了“唯一分解定理”的考虑

同时，柯西（Cauchy）亦宣布他早已取得“费马最后定理”的初步证明

3月22日，两人同时向巴黎科学院提出自己的证明。不过，对于“唯一分解定理”的问题，二人都未能成功地解决。

5月24日，德国数学家库麦尔发表了一封信，指出“唯一分解定理”的必要性，亦清楚地显示，拉梅和柯西的方法是行不通的，从而平息了二人的争论。

“唯一分解定理”

- 在一般的整数中，每一个合成数都只可能被分解成一种“质因数连乘式”
- 但在某些“复整数”中，情况未必相同
- 例如：$\boxed{6 = 2\times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})}$

而在$a+b\sqrt{-5}$的复数中,

$2,3,(1+\sqrt{-5}),(1-\sqrt{-5})$为互不相同的质数

换句话说，形如$a+b\sqrt{-5}$的复整数，并不符合“唯一分解定理”

突破性的进展

德国数学家E·库莫尔1847年他证明了对于小于100的除了37，59和67这三个所谓非正则素数以外，费尔玛大定理成立。为了重建唯一分解定理，库默尔在1844-1847年间创立了理想数理论。1857 年，库麦尔获巴黎科学院颁发奖金三千法郎

分圆整数及理想数

- 已知n为一质数，假设 $\zeta = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$，即方程 $r^n = 1$ 的复数根，则称下面的数为“分圆整数”：$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$，其中 a_i 为整数。
- 并非每一个分圆整数集合都满足“唯一分解定理”，但如果能够加入一个额外的“数”，使该分圆整数集合满足“唯一分解定理”，则称该数为“理想数”
- 库麦尔发现，当n为一些特殊的质数时，他称之为“正规质数”， 就可利用“理想数”来证明“费马定理”。

悬赏十万马克

德国的沃尔夫斯克勒 Wolfskehl (1856 - 1908)

在最后时刻挽救自杀

- 德国商人，学习医学，
- 1883 年跟库麦尔学习

订立遗嘱，悬赏十万马克，奖赏在他死后一百年内能证明“费马最后定理”的人

“证明这种不可能性的尝试，提供了一个明显的例子，说明这样一个非常特殊、似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响”。

“费马猜想是一只会下金蛋的鸡”。

无数英雄尽折腰

- 1941年，雷麦证明

  当n〈 253747887时 ， “费马最后定理”的第一种情况成立。
- 1977年，瓦格斯塔夫证明

当 n < 125000 时， “费马最后定理”成立。

无数英雄尽折腰

- 1983年德国数学家G. 法尔廷斯证明：

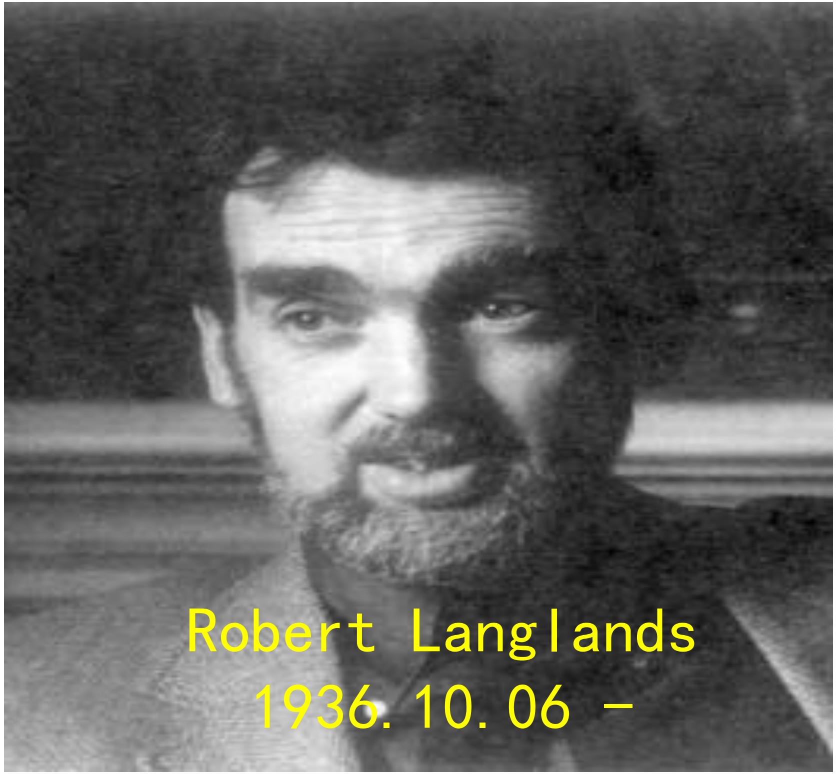
对于每一个大于2的指数n，方程$x^n+y^n=z^n$ 至多有有限多个解。

赢得1986年的菲尔兹奖

- 1988年，日本数学家宫冈洋一宣布以微分几何的角度，证明了"费马最后定理"！

不过，该证明后来被发现有重大而无法补救的缺陷，证明不成立！

“朗兰兹纲领”，是美国数学家罗伯特·朗兰兹在20世纪70年代提出的。“朗兰兹纲领”是对数论领域中重大难题的一个系统研究计划和纲领。



朗兰兹纲领：寻找所有主要数学课题之间存在着的统一的连接的环链。

在某个数学领域中无法解答的任何问题，可以被转换成另一个领域中相应的问题，而在那里有一整套新武器可以用来对付它。如果仍然难以找到解答，那么可以把问题再转换到另一个数学领域中，继续下去直到它被解决为止。

费马大定理的解决

- 费尔玛大定理被彻底征服的途径涉及到这一领域的所有前人出乎意外，最后的攻坚路线跟费尔玛本人、欧拉和库莫尔等人的完全不同，他是现代数学诸多分支(椭圆曲线论、模形式理论、伽罗华表示理论等等)综合发挥作用的结果。其中最重要的武器是椭圆曲线和模形式理论。

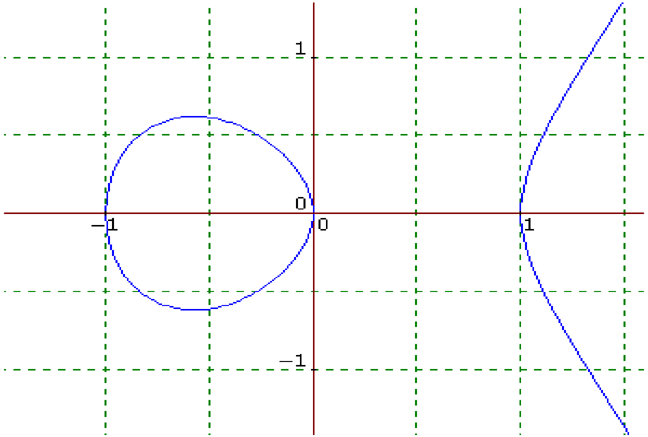
椭圆曲线

- 定义：我们称一条亏格数等于 1 的非奇异代数曲线为“椭圆曲线”
- 简单来说，就是由满足方程

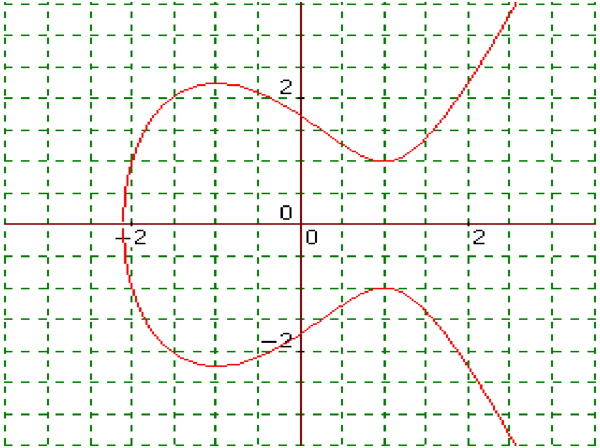
$$y^2 = x^3 + ax + b$$

的点所组成的曲线，其中 a、b 为任意的有理数。
- “椭圆曲线”原本用来研究“椭圆函数”，而椭圆函数则用于计算椭圆的周长。事实上，椭圆曲线的形状和椭圆形完全不同。现在“椭圆曲线”已被独立地研究。

椭圆曲线



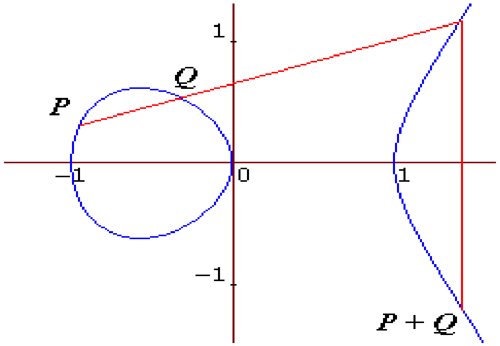
$y^2 = x^3 - x$



$y^2 = x^3 - 3x + 3$

椭圆曲线的性质

- 不难证明：当直线穿过两个位于椭圆曲线上的有理点后，该直线必定与曲线再相交于第三个有理点。



- 由此可知椭圆曲线上的有理点可形成一个“群”
- 由于以上性质可以用来解答很多相关的问题，故此“椭圆曲线”经常被人研究。
- 例如：应用于“编码理论”和“加密学”上。

谷山—志村猜想

谷山 丰（1927 - 1958）

志村五郎（生于1926）

谷山—志村猜想

- 1954 年，志村五郎于东京大学结识谷山丰。
- 之后，就开始了二人对“模形式”的研究。
- 1955 年，谷山开始提出他的惊人猜想。
- 1958 年，谷山突然自杀身亡。
- 其后，志村继续谷山的研究，并提出以下的猜想：
- 谷山—志村猜想
  每一条椭圆曲线，都可以对应一个模形式。

模形式

“模形式” f 是一个定义在半复平面上（即对于复数 z，$\mathrm{Im}\ z > 0$ 的集合）并满足下列条件的复变解析函数：

- $f((az+b)/(cz+d)) = (cz+d)^k f(z)$，其中 k 为正整数，a、b、c、d 为整数并且 $ad - bc = 1$
- $f(z) = \sum a_n e^{2\pi inz}$，其中 a_n 为复数，n 为由 0 至无限大的整数

“模形式”的起源

庞加莱 Poincaré（1854 – 1912）

- 法国数学家，发明“自守函数”

- 所谓“自守函数”，就是周期函数的推广，而“模形式”可以理解为在复平面上的某种周期函数

- 起初，大多数的数学家都不相信“谷山志村猜想”
- 60 年代后期，众多数学家反复地检验该猜想，既未能证实，亦未能否定它。
- 到了 70 年代，相信“谷山志村猜想”的人越来越多，甚至以假定“谷山志村猜想”成立的前提下进行论证。

“谷山志村猜想”与“费马最后定理”的关系

德国数学家弗赖（Gerhand Frey）

弗赖曲线（ε 猜想）

1984 年秋，弗赖在一次数学会议上，提出以下的观点：

首先，假设“费马最后定理”不成立

即发现 A、B、C 和 N，使得 $A^N + B^N = C^N$

从此得出“椭圆曲线”（后来称为“**弗赖曲线**”）：

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N x$$

弗赖发现这曲线非常特别，特别到不可能对应任何一个“模形式”！

换句话说，弗赖认为：如果“费马最后定理”不成立，那么“谷山志村猜想”也是错的！

假如

费 马 最 后 定 理 错

⇓

弗 赖 曲 线

⇓

谷 山 志 村 猜 想 错

费 马 最 后 定 理

弗 赖 曲 线

假如 谷 山 志 村 猜 想

对

错

对

再换句话说，如果“谷山志村猜想”正确，那么“费马最后定理”就必定成立！

可惜的是弗赖在1984年的证明中出现了错误，他的结果未获承认。 因此只能称之为“猜想”

美国数学家里贝特经过多番尝试后，终于在 1986 年的夏天成功地证得以下结果：

如果“谷山志村猜想”对每一个半稳定椭圆曲线都成立，则费马最后定理成立。

里贝特

（Kenneth Ribet）

里贝特的工作使得费马大定理不可摆脱地与谷山志村猜想联结在了一起，如果有人能证明每一个椭圆方程是模形式，那么这就隐含着费马方程无解，于是立即证明了费马大定理。

三个半世纪以之后，费马大定理这个孤立的问题，这个在数学的边缘上使人好奇的而无法解答地谜。现在，重新回到台前。17世纪的最重要的问题与20世纪最有意义的问题结合在了一起，一个在历史上和感情上极为重要的问题与一个可能引起现代数学革命的猜想联结在了一起。

怀尔斯 ANDREW WILES

- **英国人，出生于 1953 年**
- 10 岁已立志要证明“费马最后定理”
- 1975 年，开始在剑桥大学进行研究，专攻椭圆曲线及岩泽理论
- 在取得博士学位后，就转到美国的普林斯顿大学继续研究工作

秘密计算

- 1986 年，当里贝特提出ε 猜想后，怀尔斯就决心要证明“谷山志村猜想”

- 由於不想被别人骚扰，怀尔斯决定秘密地进行此证明
- 经过三年的努力，他开始引入“伽罗瓦表示论”来处理将“椭圆曲线”的分类问题

费马最后定理 ⇐ 谷山志村猜想

⇓

椭圆曲线可模形化

水平岩泽理论

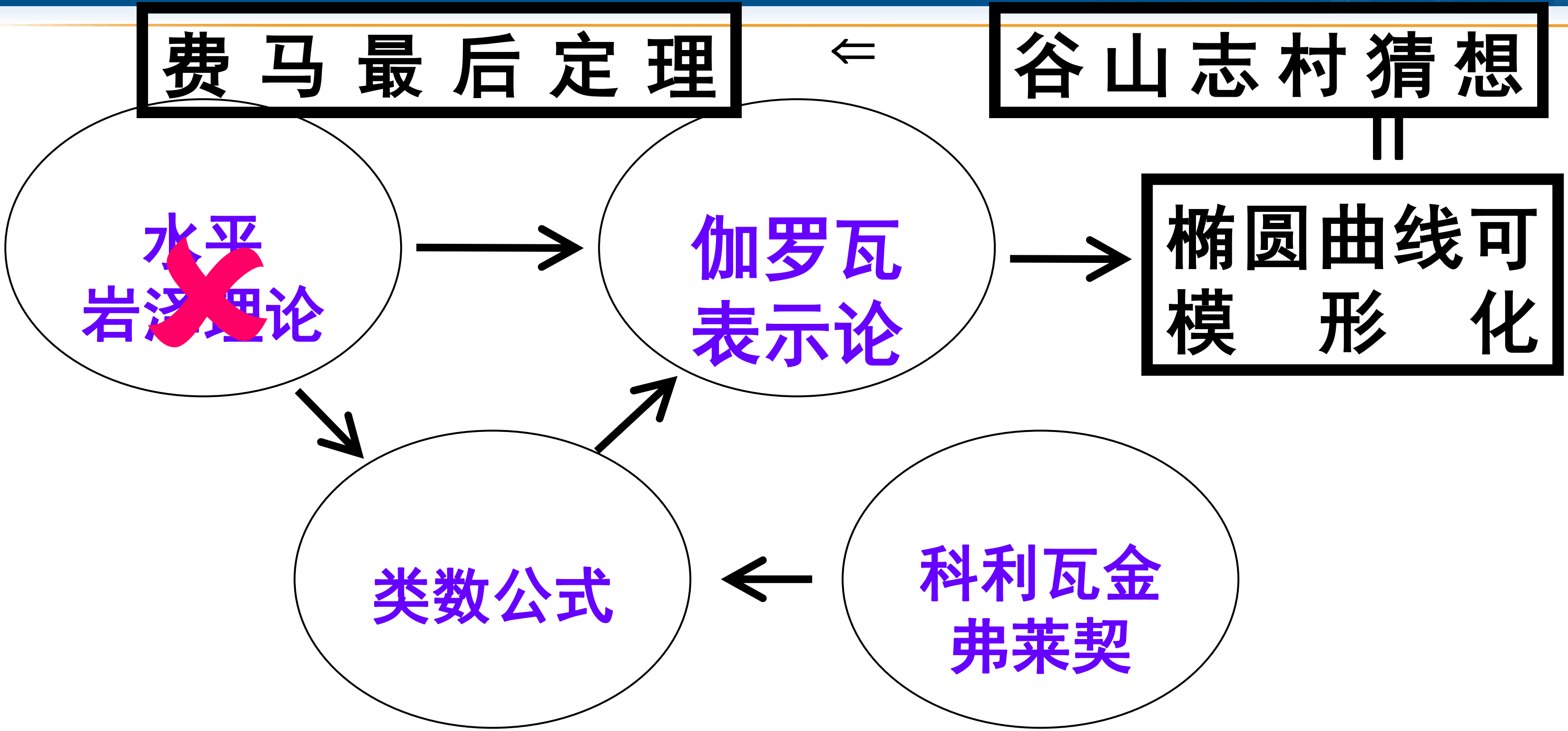
?

伽罗瓦表示论

类数公式

❖ 到了1991年，怀尔斯发觉无法以「水平岩泽理论」完成「类数公式」的计算

❖ 在一个数学会议中，他得到了一个新的计算方法。



❖怀尔斯将此方法改造后，成功地解决了有关问题

剑桥演讲

- 1993年6月23日，在剑桥大学的牛顿研究所，怀尔斯以“模形式、椭圆曲线、伽罗瓦表示论”为题，发表了他对“谷山志村猜想”（即“费马最后定理”）的证明

- 演讲非常成功，“费马最后定理”已被证实的消息，很快便传遍世界

噩梦开始！

- 演讲会过后，怀尔斯将长达二百多页的证明送给数论专家审阅
- 起初，只发现稿件中的有些细微的打印错误
- 但是同年 9 月，证明被发现出现了问题，尤其是“科利瓦金—弗莱契方法”，并未能对所有情况生效！
- 怀尔斯以为此问题很快便可以修正过来，但结果都失败！
- 怀尔斯已失败的传闻，不径而走。同年 12 月，怀尔斯发出了以下的一份电子邮件：

标题：费马状况

日期：1993年12月4日

对于我在谷山志村猜想和费马最后定理方面的种种推测，我要作一个简短的说明。在审查过程中，我们发现了许多问题，其中大部分已经解决，只剩一个问题仍然存在……。我相信不久后，我就能用在剑桥演讲中说明的概念解决它。基于尚有许多工作未能完成，所以目前不适宜发送预印本。……我将对这工作给出一个详细的说明。

再次闭关

- 1994 年 1 月，怀尔斯重新研究他的证明。但到了同年 9 月，依然没有任何进展。
- 其间，不断有数学家要求怀尔斯公开他的计算方法。
- 更有人怀疑：既然过去都无法证明“费马最后定理”，到底现在又能否证实“谷山志村猜想”呢？
- 但在 9 月 19 日的早上，当怀尔斯打算放弃并作最后一次检视“科利瓦金—弗莱契方法”时，……

成功！

费马最后定理 ⇐ 谷山志村猜想

‖

椭圆曲线可模形化

水平岩泽理论 → 伽罗瓦表示论 → 椭圆曲线可模形化

水平岩泽理论 → 类数公式 → 伽罗瓦表示论

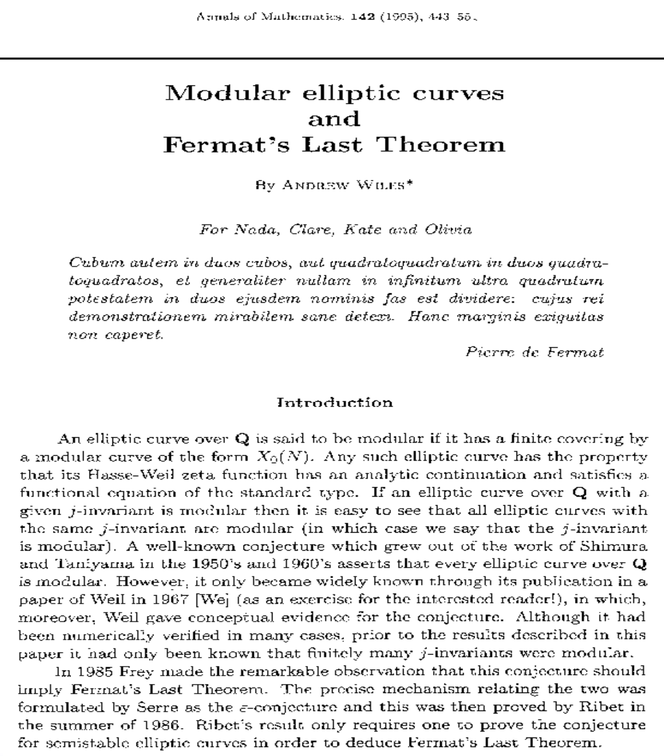
科利瓦金弗莱契 → 类数公式

- 怀尔斯发现，只要配合使用“岩泽理论”，就可以解决目前的问题！

- 经过八年的努力，怀尔斯终于证实了“谷山志村猜想”和“费马最后定理”！

最后胜利

- 1995年5月，怀尔斯长一百页的证明，在杂志《数学年鉴》中发表



Annals of Mathematics, 142 (1995), 443–551

Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem

By Andrew Wiles*

For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

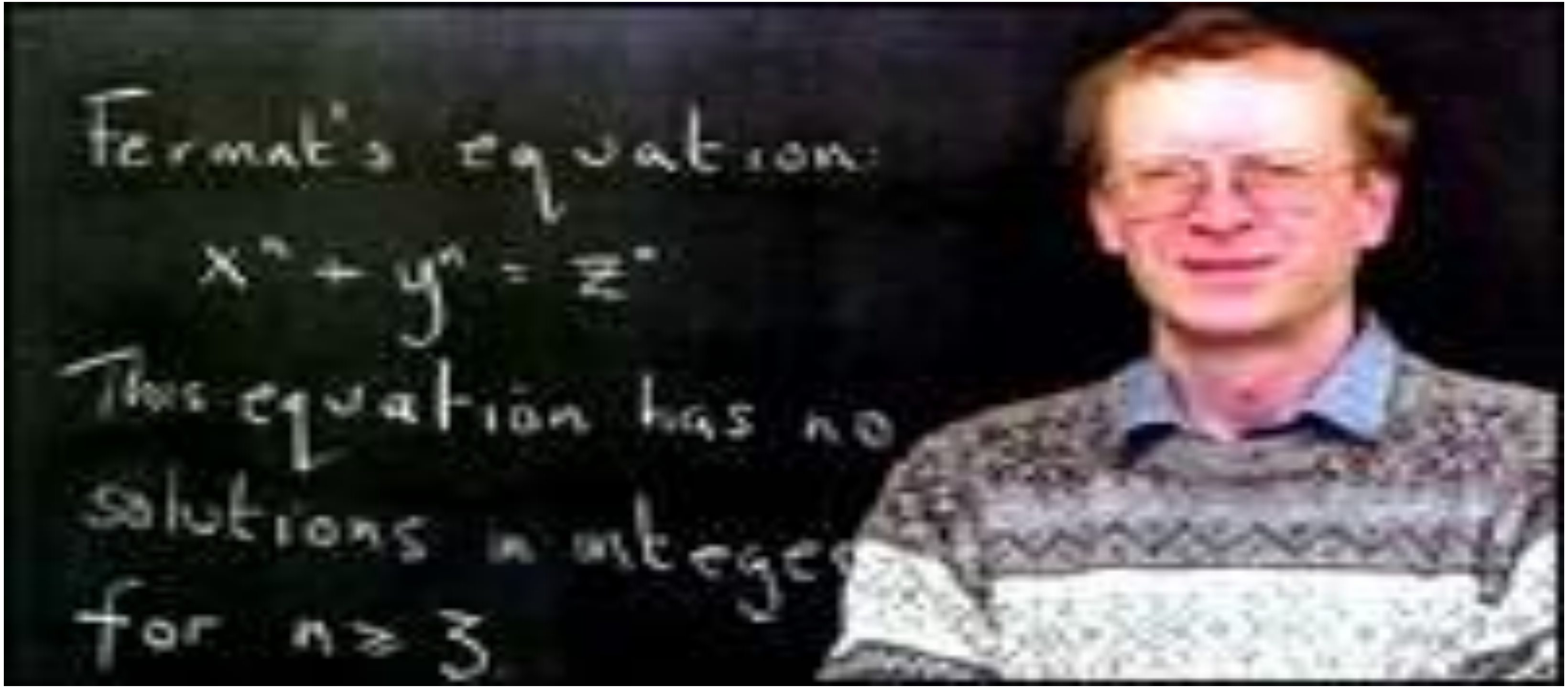
Pierre de Fermat

Introduction

An elliptic curve over **Q** is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over **Q** with a given j-invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j-invariant are modular (in which case we say that the j-invariant is modular). A well-known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's asserts that every elliptic curve over **Q** is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 [We] (as an exercise for the interested reader!), in which, moreover, Weil gave conceptual evidence for the conjecture. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j-invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ε-conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

- 1996年怀尔斯获，美国国家科学院奖，菲尔兹特别奖
- 1997年怀尔斯获得沃尔夫斯克勒10万马克悬赏大奖


Fermat's equation:
x^n + y^n = z^n
This equation has no
solutions in integers
for n ≥ 3

一部武侠小说

《费马大定理》既是一部惊险小说，也是一部武侠小说，激荡着绝顶高手传诵千古的传奇故事。

那个数学世界里的江湖是属于年轻人的。少年英雄在这里尽情挥洒他们的天纵其才，库特•哥德尔提出他的不可判定性定理时，年仅25岁；挪威的阿贝尔在19岁时做出了他对数学的最伟大的贡献，8年后在贫困交加中去世，法国数学家埃米尔特评价“他留下的思想可供数学家们工作500年”；相较而言，安德鲁•怀尔斯40岁开始研究费马大定理，别人认为他应该是才思枯竭的岁数了。

“年轻人应该证明定理，而老年人则应该写书。”英国数学家哈代说，“数学较之别的艺术或科学，更是年轻人的游戏。”还有哪片领土更适合年轻人来谱写传奇？在英国皇家学会会员中，数学家的平均当选年龄是最低的。围绕着费马大定理发生的故事，更是超出了最优秀编剧的想像。寻求费马大定理的证明牵动了这个星球上最有才智的人们，巨额的赏格，自杀性的绝望，黎明前的决斗。

一部武侠小说

谷山丰（谷山豊，Taniyama Yutaka）（1927年11月12日—1958年11月17日），日本数学家。他和志村五郎提出的谷山-志村猜想是英国数学家安德鲁·怀尔斯最终解决费马大定理的重要步骤。

志村五郎（1930年2月23日一）是一位日本数学家，出生在静冈县，毕业于东京大学，也是普林斯顿大学名誉教授。

一部武侠小说

德国实业家沃尔夫斯凯尔并不是一个有天赋的数学家，但一桩最不可思议的事件将他与费马大定理永远联系在一起。

一部武侠小说

埃瓦里斯特·伽罗瓦，1811年10月25日生，法国数学家。现代数学中的分支学科群论的创立者。

一部武侠小说

图 22(a)　在决斗的前夜，伽罗瓦力图写下他所有的数学思想。然而，别的一些感慨也出现在笔记中。在这一页上，在左下方的中心处，有"一个女人"的字样，第二个字被草草划掉，可以认为这是指成为这次决斗关键的那个女人。

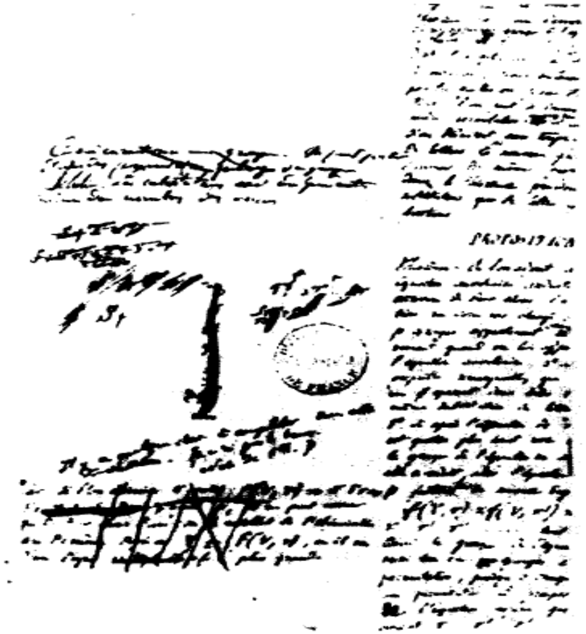
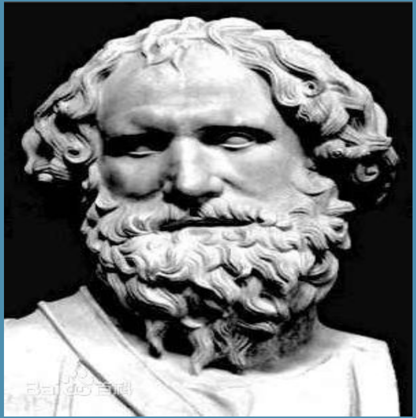


图 22(b)　当伽罗瓦绝望地试图在致命时刻到来之前把一切都写下来时，曾出现过担心自己可能来不及完成这项任务的念头。在这一页的左下部分的两行的末端可以看到'je n'ai pas le temps'（我没有时间了）的字样。

一部历史小说



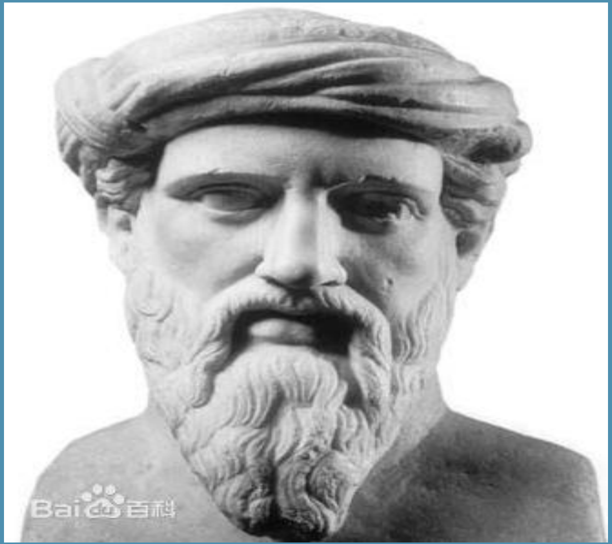
阿基米德

索非·热尔曼

高斯

凡物皆数，这就是数学的魔力。

一部历史小说



毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前580～约前500）古希腊数学家、哲学家。第一个注重“数”的人

一部历史小说

将国际象棋棋盘两个对角的白格方块拿掉，只剩下62个黑白相间的方块。现在我们取31张多米诺骨牌，每张骨牌正好可以覆盖2个方块。能否用这31张骨牌摆放得覆盖住棋盘上的6

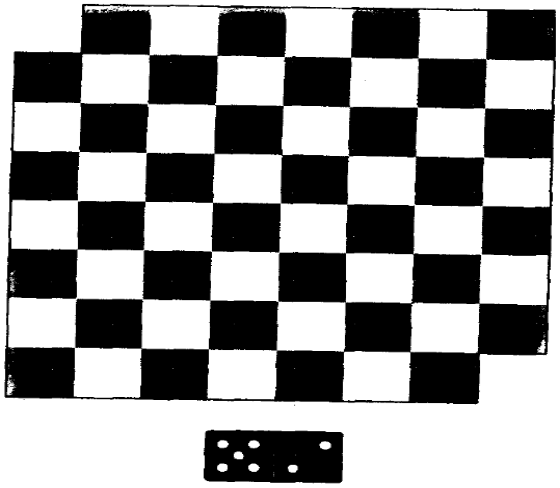
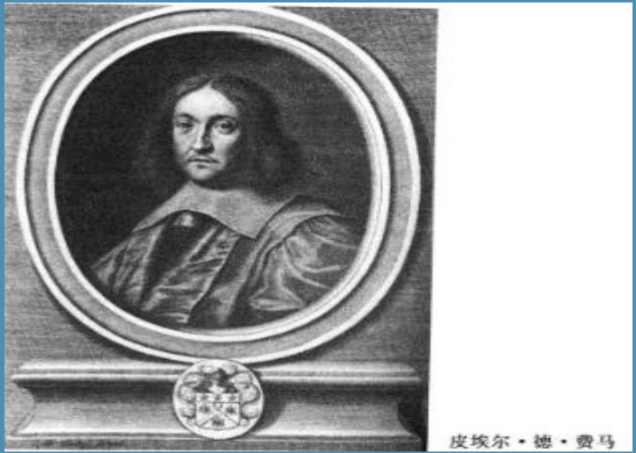


图 3　缺损棋盘问题。

“三人决斗”的问题:
黑先生、灰先生和白先生要用手枪进行决斗，每人只能开一枪，轮流射到只剩下一个人活着为止。黑先生枪法最差，三次才能击中一次，灰先生次之，三次中能击中两次，白先生枪法最好，三发三中。为了公平起见，他们商定先由黑先生开枪，然后是灰先生（如果他还活着），再接着是白先生（如果他还活着）。问题是，黑先生应该先向什么目标开枪？

一部教育小说

数学家一丝不苟的严格态度：需要经过确实无疑的证明才能承认某个结论。



费马

索非·热尔曼

柯西

一部励志小说

1996年，安德鲁•怀尔斯做出了那个改变其生命历程的决定：证明谷山－志村猜想，进而证明费马大定理。这一年，我也需要做出影响生命历程的选择：上文科，还是理科？