第3讲 常微分方程

【考纲分析】

2022专升本考纲-数学1

（一）一阶微分方程

1.理解微分方程的定义，理解微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解等概念。

2.掌握**可分离变量**微分方程的解法。

3.掌握一阶线性做分方程的解法：

（二）二阶线性微分方程

1.了解二阶线性微分方程解的结构。

2.掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法。

2022专升本考纲-数学11

1.理解微分方程的定义，理解微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解等概念。

2.掌握可分离变量微分方程的解法。

3.掌握一阶线性微分方程的解法。

一、基本知识点总结

（一）一阶微分方程

1.微分方程的定义：**含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。**其中，未知函数为**一元函数**的微分方程称为**常微分方程.**

说明：微分方程中可以不含自变量及未知函数，但必须含未知函数的导数或微分。

2.微分方程的**阶**：微分方程中未知函数的**导数的最高阶**数称为微分方程的阶。

例如：$y''' + x^4 y'' - y' = \sin 2x$ 为____阶微分方程，$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 为____阶微分方程.

3.微分方程的**解**：若将一个函数代入微分方程后,方程成为恒等式,则称此函数是方程的解.

通解：若微分方程的解中含有任意常数，且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等，则称这个解为方程的通解.

特解：不含任意常数的解，称为微分方程的特解.

4.**初始条件**：用来确定特解的条件为初始条件.

（二）一阶微分方程

1. 可分离变量的微分方程

形如： $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$或$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0$

特点：方程经过适当变形，可以将含有同一变量的函数和微分分离到等式的同一端。

解法：step1分离变量,step2两端积分。

变形为：________________________________或________________________________

2. 一阶线性微分方程

形如：________________________

如果___________则方程为一阶线性非齐次微分方程

如果___________则方程为一阶线性齐次微分方程。

解法：一阶线性齐次微分方程可化为可分离变量的微分方程。

一阶线性非齐次微分方程可用**常数变易法**和公式法，通解=______________________________________

注意：标准形式中的y' 系数必须为1，自由项$Q(x)$必须放在方程的右端。

（三）二阶常系数线性微分方程(考试中出现的比较少)

形如：$y'' + py' + qy = f(x)$ （其中 p 、q 是常数）

如果 $f(x) \neq 0$，则方程为二阶常系数线性**非齐次**微分方程；

如果 $f(x) \equiv 0$，则方程为对应的二阶常系数线性**齐次**微分方程。

1. 解的性质

定理 1：如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是该方程的解。

定理 2：若 $y_1(x)$与$y_2(x)$是二阶常系数线性齐次微分方程的两个解，且$\frac{y_1(x)}{y(x)} \neq k$(为常数)，则$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是该方程的通解。

注：二阶常系数齐次微分方程的解符合叠加原理，但$y(x)$一定是方程的通解，只有

定理 3：设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解，

$y_c(x)$ 是对应齐次方程的通解，则 $y = y_c(x) + y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程的通解。

2.求解方法：

（1）求二阶常系数齐次线性方程通解的特征根法

总结：求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤为：

1）写出微分方程的特征方程$r^2+pr+q=0$

2）求出特征根；

3）根据特征根的情况，按下表写出方程的通解

特征方程的根 r_1，r_2	方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$
一对共轭虚根 $r=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

（2）求常系数非齐次线性微分方程的特解的待定系数法

对于 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，其微分方程具有形如 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解。其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次（m 次）的多项式：$k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征根}\\1 & \lambda\text{是特征单根}\\2 & \lambda\text{是特征重根}\end{cases}$

（例如 $Q(x)$ 若为二次多项式，可设 $Q(x)=ax^2+bx+c$，a,b,c 为待定系数）。

对于 $f(x)=Ae^{\lambda x}\cos\omega x$ 或 $f(x)=Ae^{\lambda x}\sin\omega x$ 型，微分方程有形如

$y^*=x^ke^{\lambda x}(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$ 的特解，

其中 $k=\begin{cases}0 & \lambda\pm\omega i\text{不是特征根}\\1 & \lambda\pm\omega i\text{是特征根}\end{cases}$

二、常考的题型解析

（一）可分离变量的方程

例题	笔记
例1.求微分方程$xdy+2ydx=0$,满足条件$y\|_{x=2}=1$的特解.	
例2.求微分方程 $xy'-y\ln y=0$的通解。	
例3.求微分方程 $e^{x+y}dx+dy=0$的通解。	

例4. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$的通解。

例5. 求微分方程$y^2dx+(x+1)dy=0$满足条件$y|_{x=0}=1$的特解。

（二）一阶线性微分方程

例6. 求解微分方程$y'+xy=xe^{-x^2}$

例7. 求解微分方程 $xy'-y+x\ln x=0$

例8. 求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x\sin x$的通解　　(2010年）

例9. 求解微分方程：$y'-\frac{1}{x}y=\frac{x^2-1}{x}$　　(08年真题）

例10.求解微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$.

例11.求解微分方程$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$　(09年真题)

例12.求解微分方程:$y'-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=0$

例13.求一曲线方程，该曲线通过原点，且在点（x,y）处的切线斜率等于$2x+y$.

例 14.满足方程$f(x)+2\int_0^x f(x)dx=x^2$的解是：$f(x)=$（　　）

A. $Ce^{-2x}+x+\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$　C. $-\frac{1}{2}e^{-2x}+x+\frac{1}{2}$　D. $Ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}$

例15.可导函数$\phi(x)$满足$\phi(x)\cos x+2\int_0^x\phi(t)\sin tdt=x+1$,

求：$\phi(x)$

(三) 二阶常系数微分方程

例题	笔记
例 16、验证 $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sin x$ 是方程 $y''+y=0$ 的线性无关的解，并写出其通解。	
例17. 求 ⑴ $y''+y'-2y=0$　(2)$y''-4y'+4y=0$　(3)$y''+6y'+13y=0$　的通解。	
例18.求微分方程$y''-4y'-5y=0$的通解.	
例19. 通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$ 的二阶线性常系数齐次微分方程是:___	