第4讲 多元函数微积分

【考纲分析】

2022专升本考纲-数学1

（一）多元函数微分学

1. 了解二元函数的概念、几何意义及二元函数的极限与连续概念，**会求二元函数的定义域。**
2. 理解二元函数偏导数和全微分的概念，**了解全微分存在的必要条件和充分条件。**掌握二元函数的一阶、二阶偏导数的求法，会求二元函数的全微分。
3. 掌握复合函数一阶偏导数的求法
4. 掌握由方程F(x, y, z)=0所确定的隐函数z=z(x, y)的一阶偏导数的计算方法。
5. 会求二元函数的无条件极值。

（二）二重积分

1. 理解二重积分的概念、性质及其几何意义。
2. 掌握二重积分在直角坐标系及极坐标系下的计算方法。

2022专升本考纲-数学11

（一）多元函数微分学

1. 了解二元函数的概念、几何意义及二元函数的极限与连续概念。
2. 了解偏导数、全微分的概念，会求二元函数的一、二阶偏导数。会求二元函数的全微分。
3. 掌握复合函数一阶偏导数的求法。
4. 掌握由方程F(x, y, z)=0所确定的隐函数z=z(x, y)的一阶偏导数的计算方法。
5. 会求二元函数的无条件极值。

（二）二重积分

1. 理解二重积分的概念、性质及其几何意义。
2. 掌握二重积分在直角坐标系下的计算方法。

一、基本知识点总结

（一）多元函数微分学

1. 二元函数：$z=f(x,y)$

注：1）一元函数的定义域是数轴上的点的集合（**区间**），二元函数的定义域是平面上点的集合（**区域**）；2）一元函数的图形是平面上的**曲线**，而二元函数的图形一般是空间中的**曲面**。

二元函数的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$或$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

二元函数的连续：若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

则$\mathbf{z=f(x,y)}$在点$(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$连续。

2. 偏导数

设函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一领域D内有定义，当固定$\mathbf{y=y_0}$，而x在x_0处有增量Δx时，若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$存在，则称此极限值为$\mathbf{z=f(x,y)}$在点$(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$处队x的偏导数，记作$f'_x(x_0,y_0)$，$z'_x|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\frac{\partial f}{\partial x}|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$或$\frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$。即：$f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

同理$f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta x)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

偏导函数：

$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$，视y为常量，对x求导

$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$，视x为常量，对y求导

总结：二元函数求偏导，是将二个变量中的一个固定不动，求另一个变量的“导数”，这时的二元函数实际上可视为一元函数，因此在求导时可利用一元函数的求导公式、法则去求解。

3. 高阶偏导

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$； $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$； $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$； $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$。

注：两个二阶混合偏导连续时值相等。

4. 全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

5. 多元复合函数求偏导法

——链式法则：**“同链相乘，异链相加”**

(1) 若函数z=f(u,v)，u=φ(x,y)，v=ψ(x,y)

则偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

(2) 若函数z=f(u,v)，**u=$\varphi(x)$，v=$\psi(x)$**

则全导数：$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$

(3) 若函数z=f(u,x,y)，u=φ(x,y)，

则偏导数：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$；$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$

注：$\frac{\partial z}{\partial x}$是在最终二元复合函数z=f[$\varphi$(x,y),x,y]中视y为常量，对x求偏导。在此处键入公式。

$\frac{\partial f}{\partial x}$是在最终三元复合函数z=f(u,x,y)(外函数)中视u,y为常量，对x求偏导。

6. 隐函数求偏导：

由F(x,y,z) = 0，二元隐函数z=z(x,y)的偏导数公式：

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$

7. 二元函数无条件极值

定理 1（极值的必要条件）：设函数处$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$**处偏导数存在，并取得极值，则有**

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

定理 2（极值的充分条件）：设函数 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$**的某邻域内有一阶、二阶连续偏导数**，且$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，记$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, 则

(1) 当$B^2-AC<0$时，**有极值**，$\begin{cases} A<0\text{时有极大值}f\ (x_0,y_0)； \\ A>0\text{时有极大值}f\ (x_0,y_0) \end{cases}$

(2) 当$B^2-AC>0$时，**无极值；**

(3) 当$B^2-AC=0$时，**函数**$z=f(x,y)$**可能有极值也可能无极值**

（二）二重积分

1. 二重积分定义式：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

几何意义：

(1) 当被积函数$f(x,y)\geq 0$时，$\iint_D f(x,y)d\sigma$表示曲顶柱体的**体积**；

(2) 当被积函数$f(x,y)\leq 0$时，$\iint_D f(x,y)d\sigma$表示曲顶柱体的**体积的负值**；

(3) 当被积函数$f(x,y)$在区域内有正有负时，这时$\iint_D f(x,y)d\sigma$的值就等于xoy坐标面上方和下方曲顶柱体体积的**代数和**。

2. 二重积分性质（与定积分相似）

性质1：$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

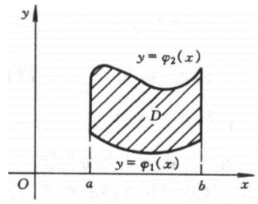
性质2：$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

性质3：$\iint\limits_{D=D_1+D_2} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

性质4：若在领域D上$f(x,y)=1$，则$\sigma=\iint_D d\sigma$（σ为区域D的面积）

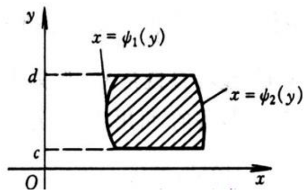
3. 二重积分的计算

（1）直角坐标系 $d\sigma=dxdy$



D:$\begin{cases} a\le x\le b \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x) \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$



D:$\begin{cases} c\le y\le d \\ \psi_1(y)\le y\le \psi(y) \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

特别地，若D为矩形区域$\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$

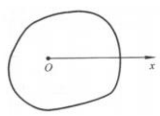
$$\iint_D f(x)g(x)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy$$

（2）极坐标系　$d\sigma=rdrd\theta\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

注：当积分区域为圆形、扇形、环形时，一般采取极坐标。

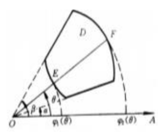
1）极点在区域内部



$D:\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le r(\theta) \end{cases}$

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

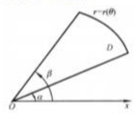
2）极点在区域的外部



$D:\begin{cases} \alpha\le\theta\le\beta \\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta) \end{cases}$

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

3）极点在两极径（该两极径恰为区域的边界）的交点上.



$D:\begin{cases} \alpha\le\theta\le\beta \\ 0\le r\le r(\theta) \end{cases}$

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

二、常考的题型解析

（一）求二元函数的定义域

例题	笔记
例1.求函数$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域.	

（二）求一阶偏导数

例2. 求下列函数的偏导数。 (1) $z=x^2+3xy-e^{y^2}$； (2)$z=(1+x)^y$.	

例3."函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在"是"函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分"的______条件。(2010年真题)	
例4.求$z=x^2+3xy+y^2$在点（1,2）处的偏导数及全微分.	
例5. 设$f(x,y)=x^2+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$,求$f_x(2,1)$. (12年考题)	
例6.求函数$z=x\ln(x+y)$的全微分. (08年考题)	
例7.求函数$w=x+\sin\frac{y}{2}+e^y$的全微分. (09年考题)	

（三）求高阶偏导数

例题	笔记
例8.已知$z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	

例9.设$z=xy+\frac{x}{y}$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	

（四）多元复合函数微分法

例题	笔记
例10.设$z=u^2\ln v,u=\frac{x}{y},v=3x-2y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$	
例11.设$z=u^2v,u=\cos x,v=\sin x$，求全导数$\frac{dz}{dx}$	
例12.设$z=f(xy,x+y)$,且$f(x,y)$可微，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$	
例13.设$f(u,v)$为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$______	

（五）隐函数的微分法

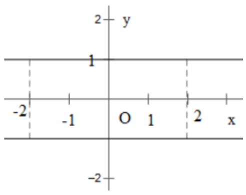
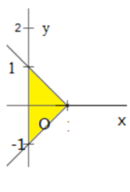
例题	笔记
例14.设方程$x^2y-x^3z-1=0$确定隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.	

例15.求由方程$e^z - xyz = 0$所确定的二元函数$z = f(x,y)$的全微分dz	

（六）无条件极值的求法

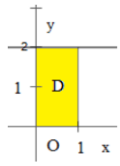
例题	笔记
例16.求函数$f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$的极值.	
例17.作一容积为V立方米的长方体有盖容器，应如何选择尺寸方能最省料。（09电子）	

（七）二重积分的计算

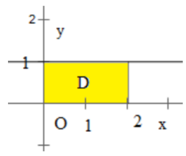
	例题	笔记
1. 直 角 坐 标	例18.设$D = \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$,则$\iint\limits_D 4d\sigma =$  	
	例19.设D是由曲线$x + y = 1, x - y = 1, x = 0$所围，则$\iint\limits_D dxdy =$__.  	

例20.设D：$x^2+y^2\le 1$,则$\iint\limits_D dxdy=$__（08年考题）

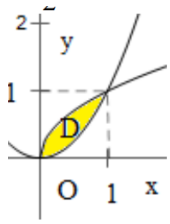
例21.计算$\iint\limits_D \frac{y}{1+x}d\sigma, D:0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 2.$



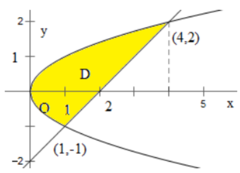
例22.计算$\iint\limits_D e^{x+2y}d\sigma, D:0\le x\le 2, 0\le y\le 1.$



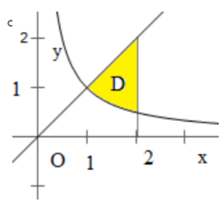
例23.计算$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$,其中$D$是由$y=\sqrt{x}, y=x^2$所围。



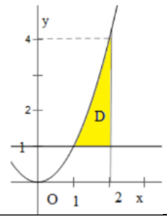
例24.计算$\iint\limits_D xyd\sigma$其中D由$y^2=x, y=x-2$所围.(09计算机)



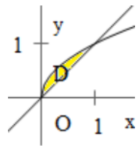
例25.计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$,区域$D$由$x=2, y=x, xy=1$所围



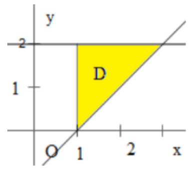
例26.计算$\iint\limits_D \frac{x}{y}d\sigma$，其中$D$由$y=1, y=x^2, x=2$所围。（2010年）



例27.计算$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy, D: y^2=x, y=x$所围。

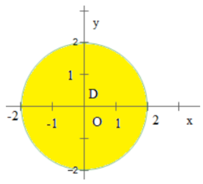


例28.计算$\iint\limits_D \cos y^2 dxdy, D: y=2, x=1, y=x-1$所围。（07年考题）

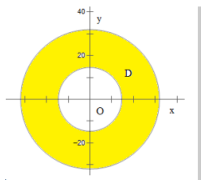


2. 极坐标

例29.计算$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma, D: x^2+y^2\le 4.$



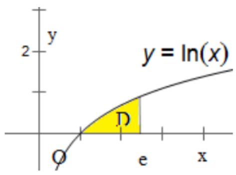
例30.计算$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma, D: x^2+y^2\le 4\pi^2, x^2+y^2\ge \pi^2.$



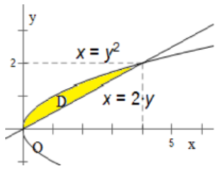
3. 交换积分顺序

例31.交换下列积分次序：(09年真题)

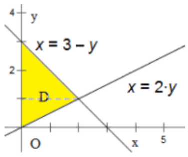
(1) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$



(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$



(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$



例32.计算$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \cos x^2 dx.$