第2讲 定积分

【考纲分析】

2022专升本考纲-数学1

1. 理解定积分的概念及几何意义，了解可积的条件。
2. 掌握定积分的性质。
3. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式。
4. 熟练掌握定积分的换元积分法与分部积分法。
5. **会用定积分表达和计算平面图形的面积、旋转体的体积。**

2022专升本考纲-数学11

1. 理解定积分的概念及几何意义，了解可积的条件。
2. 掌握定积分的性质。
3. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿一莱布尼茨公式。
4. 熟练掌握定积分的换元积分法与分部积分法。
5. 会用定积分表达和计算平面图形的面积。
6. **会利用定积分求解经济分析中的简单应用问题。**

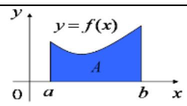
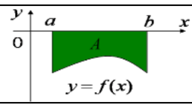
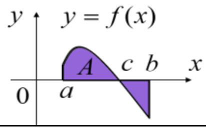
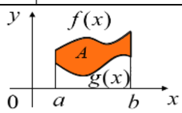
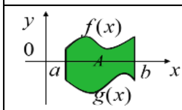
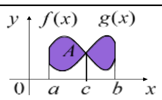
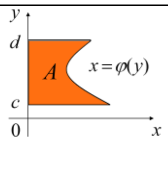
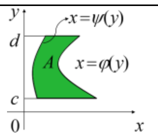
一、基本知识点总结

（一）定积分的概念：____

。

注意事项：____

（二）定积分的几何意义

	序号	函数	曲线图像	面积	思考：如何用一个式子表示？
1. 当积分变量为x时	曲边梯形	1. $f(x)\ge 0$		A=	
		2. $f(x)\le 0$		A=	
		3. 有时$f(x)\ge 0$，有时$f(x)\le 0, x\in[a,b]$		A=	
	两曲线	$f(x)\ge g(x), x\in[a,b]$		A=	
				A=	
		有时$f(x)\ge g(x)$，有时$f(x)\le g(x)$，$x\in[a,b]$		A=	
1. 当积分变量为y时	曲边梯形：（由连续曲线$x=\varphi(y)$与直线$y=c, y=d$所围成）	$\varphi(y)\ge 0$		A=	
	两曲线围成：（由连续曲线$x=\varphi(y), x=\psi(y)$，与直线$y=c, y=d$	$\varphi(y)\ge\psi(y)$，$x\in[a,b]$		A=	

	所围成）				

（三）定积分的性质

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.

（四）变上限积分（变上限函数）

若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$ ---变上限积分

且 $F'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$

$$(\int_a^{u(x)} f(t)dt)'=f[u(x)]u'(x)$$

$$(\int_{v(x)}^{b} f(t)dt)'=-f[v(x)]v'(x)$$

$$(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt)'=f[u(x)]u'(x)-f[v(x)]v'(x)$$

（五）牛顿—莱布尼茨公式：____。

（六）定积分的换元积分法和分部积分法

____。

____。

（七）对称公式：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, & f(x)\text{是奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{是偶函数}\end{cases}$$

（八）广义积分

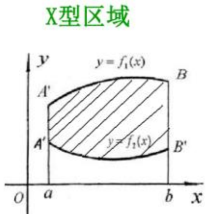
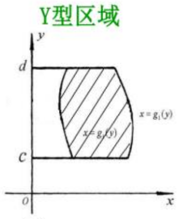
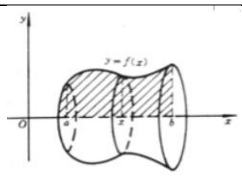
$f(x)\in C[a,+\infty)$　$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

$f(x)\in C(-\infty,b]$　$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^{+\infty} f(x)dx$

（九）定积分的几何应用

题型	**类型**	**笔记**
1. 求平面图形的面积	X型区域  Y型区域  $A=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$　$A=\int_c^d[g_1(y)-g_2(y)]dy$	
2. 求旋转体的体积	$V_x=\int_a^b \pi y^2dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx$ $V_y=\int_c^d \pi x^2dy=\int_c^d \pi\phi^2(y)dy$ 	

（十）定积分的经济应用

二、常考的题型解析

（一）变上限积分

例题		笔记
例1	(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+2t^2)dt}{x^3}$	
	(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{2x}^0 \sin t^2 dt}{x^3}$	
	(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t dt}{1-\cos x}$	
例 2.已知 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt$，求 $f'(x)$.		
例3.设 $\int_0^x f(t)dt = x^2-\ln x-1$，则 $f(x)=(\quad)$.		
例 4.设 $\varphi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t}dt$，则 $\varphi'(x)=(\quad)$		

例 5. 已知 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$，求 $f(2)$．	
例 6.求函数 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 的极值。	

（二）求定积分

方法	例	解答过程	笔记
1. 利用牛顿莱布尼茨公式	例题 7.	$1.\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$	
		$2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$	
		$3.\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$	
2. 利用对称公	例题8	例8. 定积分 $\int_{-2}^{2} x\cos x dx = (\quad)$ $A.-1$　$B.0$　$C.1$　$D.\frac{1}{2}$	

式		例 9.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^4 x}{1+x^2}dx$，N=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则， （A）.N<P<N，（B).N<M<P，（C).M<P<N，（D）.P<M<N.	
	例 10	1. $\int_{-2}^{2}\frac{x^5+2x^4+x^3-3x^2-1}{x^3+x}dx$	
		2. $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\cos^2 x\right)dx$	
3. 利用积分区间的可加性	例 11	1. $\int_{0}^{2\pi}\lvert\sin x\rvert\,dx$	
		2. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\lvert\ln x\rvert\,dx$	
	例 12	例12. 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2, & 1<x\le 2\end{cases}$，则$\int_0^2 f(x)dx=()$ $(A).1$　$(B).\frac{8}{3}$　$(C).2$　$(D).0$	

4.利用定积分的换元法	例13	1. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$	
		2. $\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	
		3. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$	
		4. $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$	
		5. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$	
		6. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$	
		7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$	

5. 利用定积分的分部积分法	例14	1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx$	
		2. $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	
		3. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$	
6. 利用定积分是一个常数的本质		例 15. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，求 $f(x)$。	

(三) 求广义积分

求广义积分	例16	1. $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$	
		2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$	

3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

（四）积分证明题

例17.设函数$f(x)$连续，证明 $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$

例18.设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(x)>0$,证明方程

$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$,在$(a,b)$内有且仅有一个实根.

例19. 已知 $f(x)$为奇函数，求证 $\int_0^x f(t)dt$为偶函数。

例20. 已知 $f(x)$在$(-t,t)$上为偶函数，求证 $f'(x)$在$(-t,t)$上为奇函数。

例 21. 证明$\int_0^x \frac{2+\sin t}{1+t}dt=\int_x^1 \frac{1+t}{2+\sin t}dt$ 在$(0,1)$内有唯一的实根.

(三)求平面图形的面积

	例题	图像	笔记
1.求曲线围成的面积	例22求曲线围成的面积 (1) $y=\frac{1}{x}, y=x, x=2;$		
	(2) $y=\frac{1}{x}, y=x, x=2, x$轴;		
	(3) $y=e^{x}, y=e^{-x}, x=1;$		
	例23.由曲线$y=e^{x}, y=e$及y轴围成的图形的面积是____		
	例24.曲线$y=x^{2}$与直线$y=1$所围成的图形的面积为（　）		
	例 26. 已知曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=ax+b$ 相切于点 $(c,\ln c)$，其中 $2<c<4$. $y=\ln x$ 与直线 $y=ax+b$，$x=2$，$x=4$ 围成一个封闭图形. （1）求 C 为何值时，该封闭图形的面积最小? （2）根据（1）所求，求 a,b 的值。 例25.计算抛物线$y^{2}=2x$与直线$y=x-4$所围成图形的面积。		

2. 旋转体的体积	**例 27.设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积最小。**		