



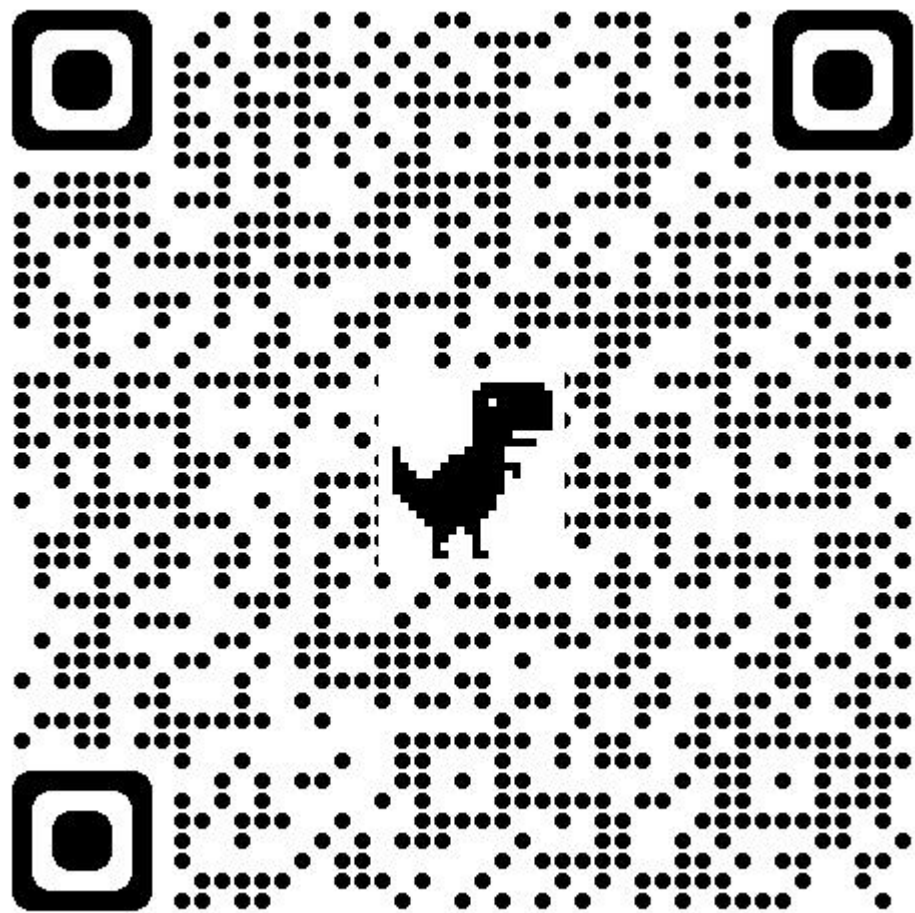
数学建模

公共教学部

王嫣



李克强重要批示强调实施好三孩生育政策



李克强总理对全国优化生育政策电视电话会议作出重要批示，批示指出人口问题是关系中华民族发展的_____问题

A

基础性

B

全局性

C

战略性

提交

目录

CONTENTS

- 01 马尔萨斯人口论
- 02 马尔萨斯人口模型
- 03 Logistic模型
- 04 Leslie模型



01

马尔萨斯人口论





提出问题

马尔萨斯人口论与数学建模有关

年度	人口总数	增长率	年度净变化
1960	3,039,332,401	1.33	40,781,960
1961	3,080,114,361	1.80	56,083,390
1962	3,136,197,751	2.19	69,508,948
1963	3,205,706,699	2.19	71,110,065
1964	3,276,816,764	2.08	69,021,089
1965	3,345,837,853	2.08	70,227,393
1966	3,416,065,246	2.02	69,742,104
1967	3,485,807,350	2.04	71,868,340
1968	3,557,675,690	2.08	74,665,661
1969	3,632,341,351	2.05	75,268,761



提出问题

马尔萨斯人口论与数学建模有关

年度	人口总数	增长率	年度净变化
1991	5,366,938,089	1.53	82,725,730
1992	5,449,663,819	1.48	81,337,993
1993	5,531,001,812	1.44	79,976,536
1994	5,610,978,348	1.41	79,887,428
1995	5,690,865,776	1.36	77,746,508
1996	5,768,612,284	1.35	78,192,518
1997	5,846,804,802	1.32	77,770,099
1998	5,924,574,901	1.31	77,934,526
1999	6,002,509,427	1.29	77,632,256

根据上面数据，如果预测下2005年这个地方的人口，结合你的数学模型知识储备，你觉得最好选哪种模型

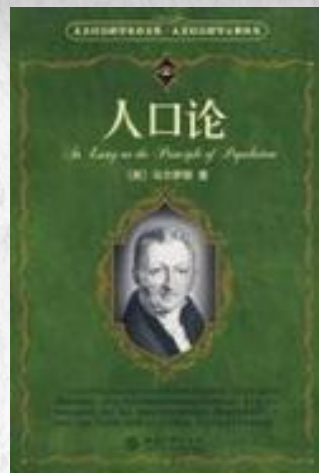
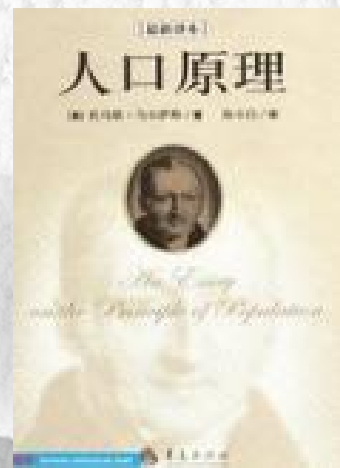
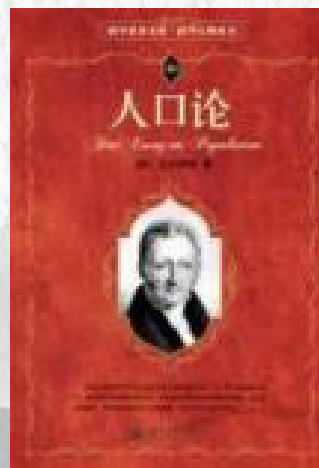
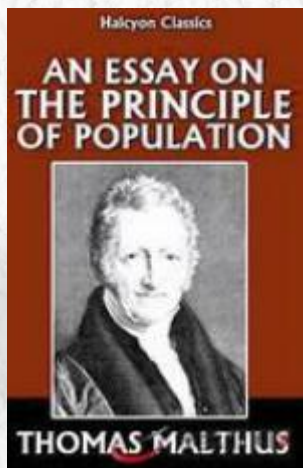
- A 统计回归的数据处理模型
- B 初等模型
- C 线性规划模型
- D 线性代数模型


提交

马尔萨斯人口论



马尔萨斯，英国牧师，被称为西方思想史上最富有争议的经济学家、人口学家，1798年出版的《人口原理》，闻名于世。其著作被出版多种语言。经济学家凯恩斯高度评价马尔萨斯的经济学。





马尔萨斯人口论

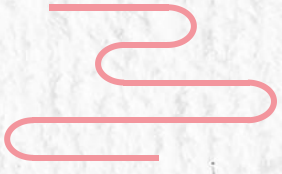
基本论断：

人类食物供给增长趋势无法跟上人口增长的趋势

基本公理：

1. 食物为人类生存必需；
2. 两性生育保持现状。

中国人说，食色，性也。



马尔萨斯人口论

人口按几何增长趋势，如级数

1,2,4,8,16, — —

食物供应按线性函数增长趋势，如级数

1,2,3,4,5,6, — —

人口有无限增长的趋势，直至食物供应的极限为止

结论：要控制人口的无节制增长

马尔萨斯人口论认为人口数量按几何级数增长，食物供应数量按线性级数增长，以下论断，你认为正确的是

A

要控制人口无节制的增长

B

人口无限增长，终会超过食物供给量的增长

C

民以食为天，食物的稀缺会引起人类的战争

D

马尔萨斯人口论没有考虑天灾人祸破坏人口的几何增长

提交



02

马尔萨斯人口模型



马尔萨斯人口模型

马尔萨斯的人口论中没有数学化的论述

欧几里得将数学的公理化表述方式引入西方文化，并产生重要影响

现在，我们将马尔萨斯的想法和原则数学化



马尔萨斯人口模型

$P(t)$

表示t时刻的人口数量

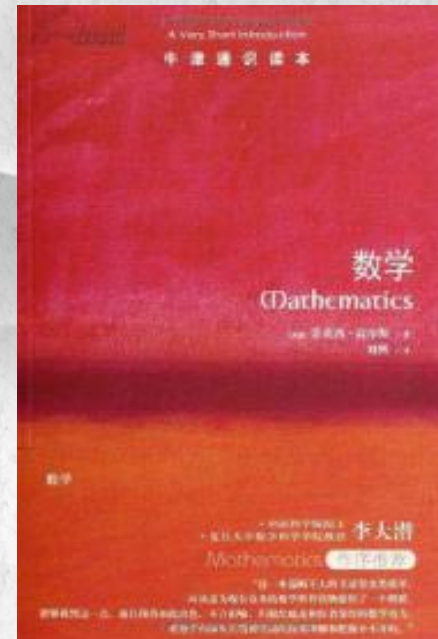
我们的问题是：

1. 已知当前或过去某个时刻的人口数量，预测未来某个时刻的人口？
2. 人口无限增长的趋势？

马尔萨斯人口模型

类似的研究，蒂莫西高尔斯在《数学》讨论人口数量趋势时，引入数对

$$(t, P(t))$$



其中 t 表示时间， $P(t)$ 表示时刻 t 的人口数量， b 表示出生率， d 表示死亡率

设2002年初人口总量是 p ,则2002年出生数和死亡数分别为 bp,dp ,则2003年初的人口总数是

- A $p+bp-dp=(1+b-d)p=(1+r)p$, 其中 r 是自然增长率
- B $p+dp-bp=(1+d-b)p=(1+r)p$, 其中 r 是自然增长率

提交



马尔萨斯人口模型

$p + bp - dp = (1 + b - d)p = (1 + r)p$, 其中 r 是自然增长率

人的生死是不是随时发生的? 上述离散模型, 连续化

$$p(t + \Delta t) - p(t) = rp(t)\Delta t,$$

$$p(t + dt) - p(t) = rp(t)dt,$$

$$\text{初值问题: } dp(t)/dt = rp(t), \quad p(t_0) = p_0$$



马尔萨斯人口模型

解得 $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$,

人口数量确实是时间变量的指数函数，因此是指数增长

观察这个人口模型，当时间无限延长时，人口数量是多少

A

$+\infty$

B

当 $r > 0$ 时，是 $+\infty$

C

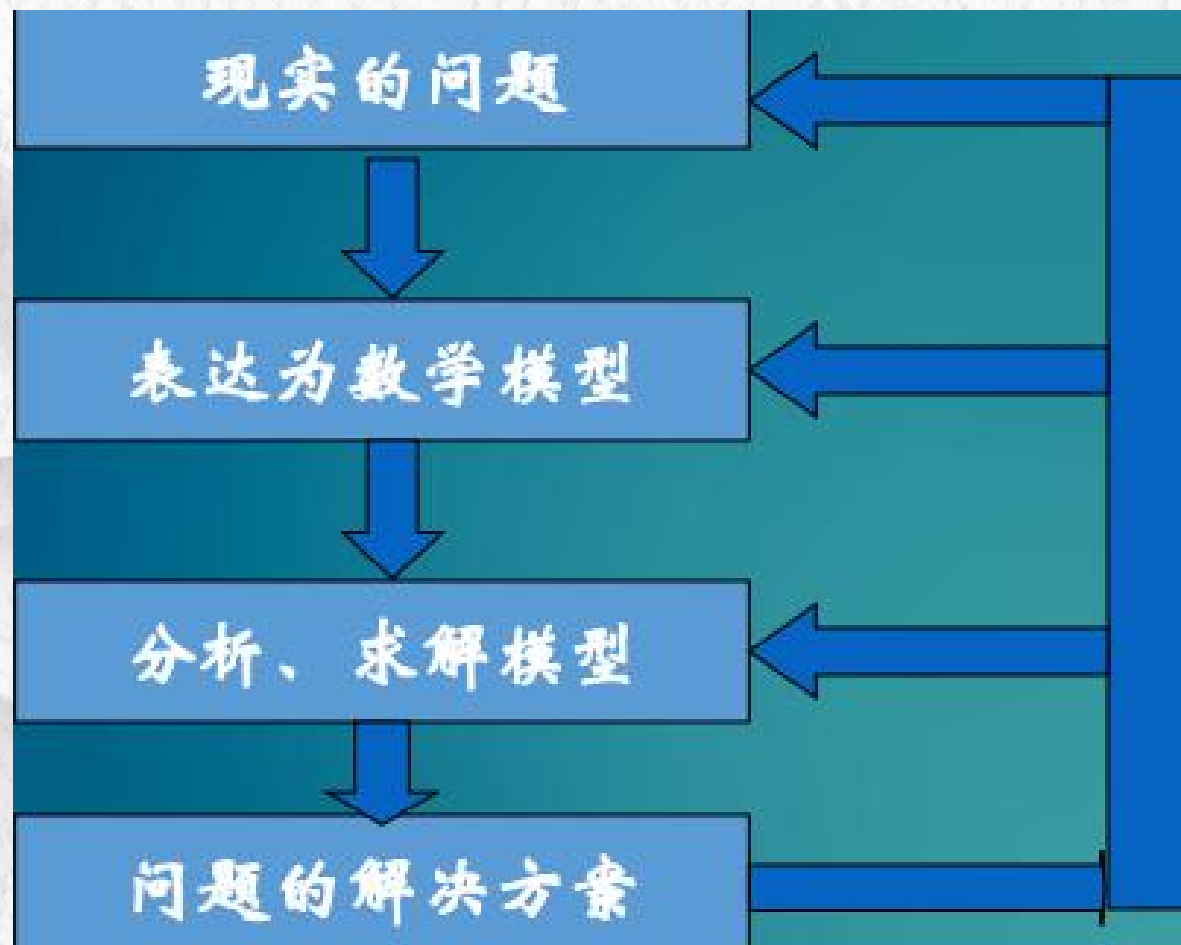
当 $r < 0$ 时，是0

D

当 $r = 0$ 时，是 p_0

提交

马尔萨斯人口模型



03

Logistic模型





Logistic模型

马尔萨斯模型认为人口数量的增长是时间的函数，但人口自然增长率是常数。

Logistic模型是在原模型的基础上改进了一下，引入自然增长率函数，考虑了地球的人口总容量，设为 K ，则

$$r(t) = r(P(t)) = r \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right)$$



Logistic模型

$N(t)$ 表示时刻 t 的人口数量

则Logistic模型如下:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t)$$

$$N(t_0) = N_0$$



Logistic模型

求解初值问题，得解

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-r(t-t_0)}}$$

$$C = \frac{K - P_0}{P_0}$$

在Logistic模型
数量趋于多少

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-r(t-t_0)}}$$

中，随着时间无限延长，人口

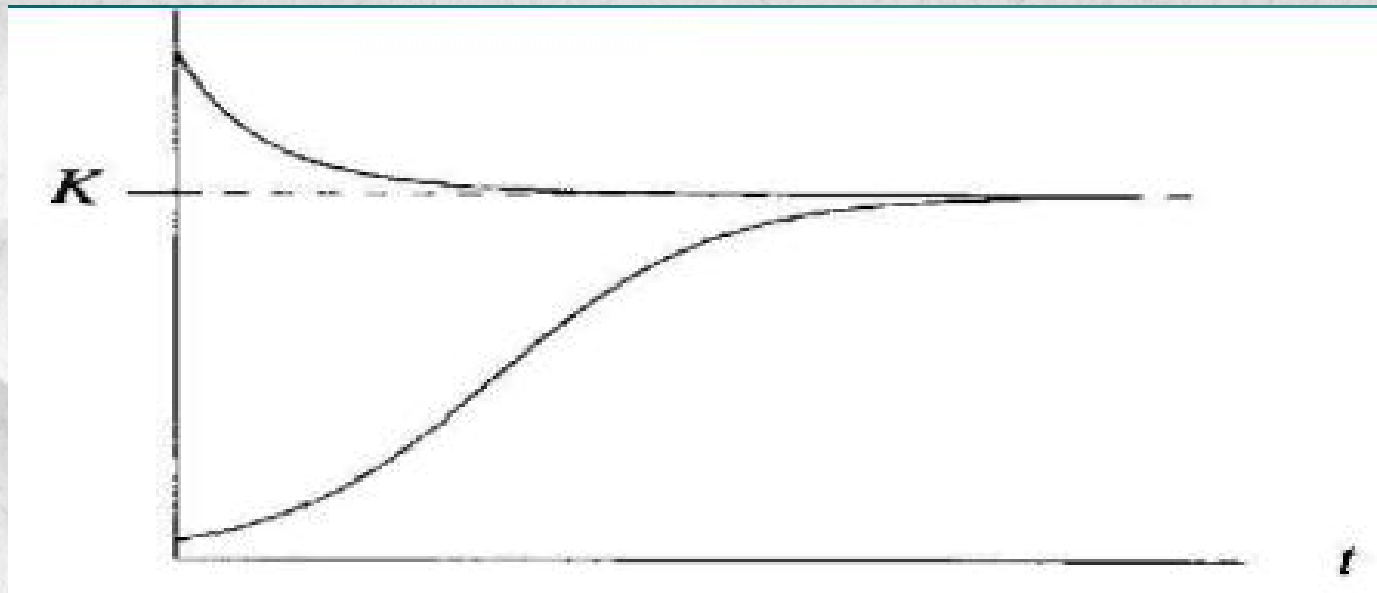
- A K
- B $+\infty$
- C C
- D e

提交



Logistic模型

结果与马尔萨斯模型完全不同!



讨论下马尔萨斯模型与Logistic模型的区别与联系

A

人口数量都是时间的函数

B

Logistic模型多了参数K

C

Logistic模型认为人口增长率也是时间的函数

D

马尔萨斯模型认为人口增长率是常数

提交

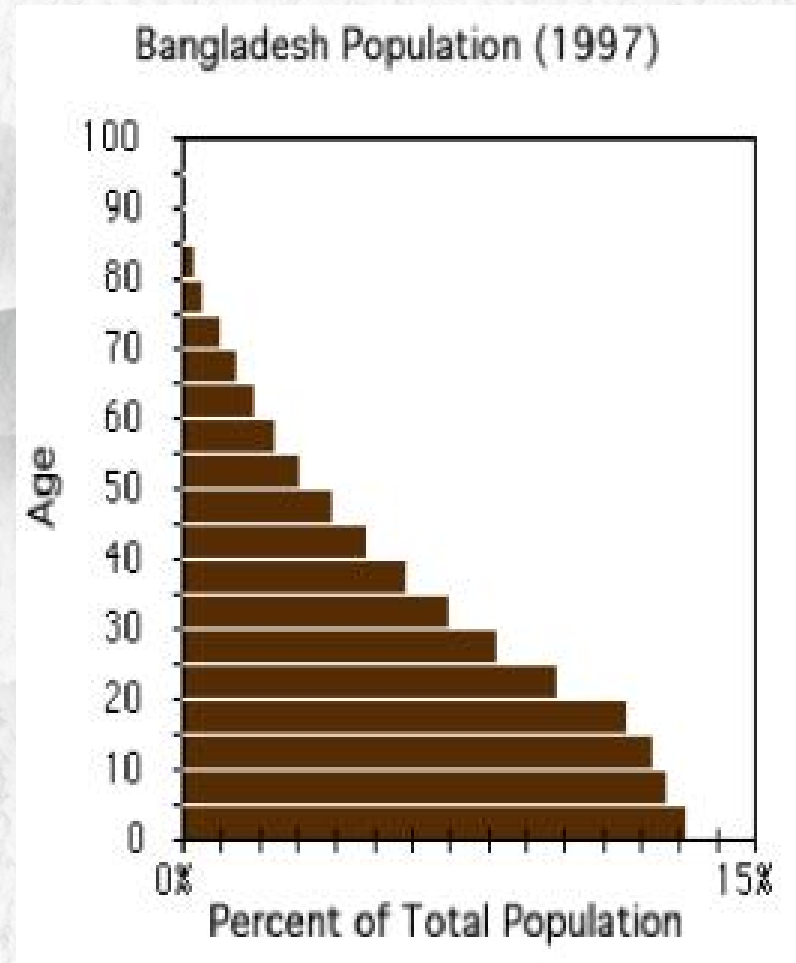
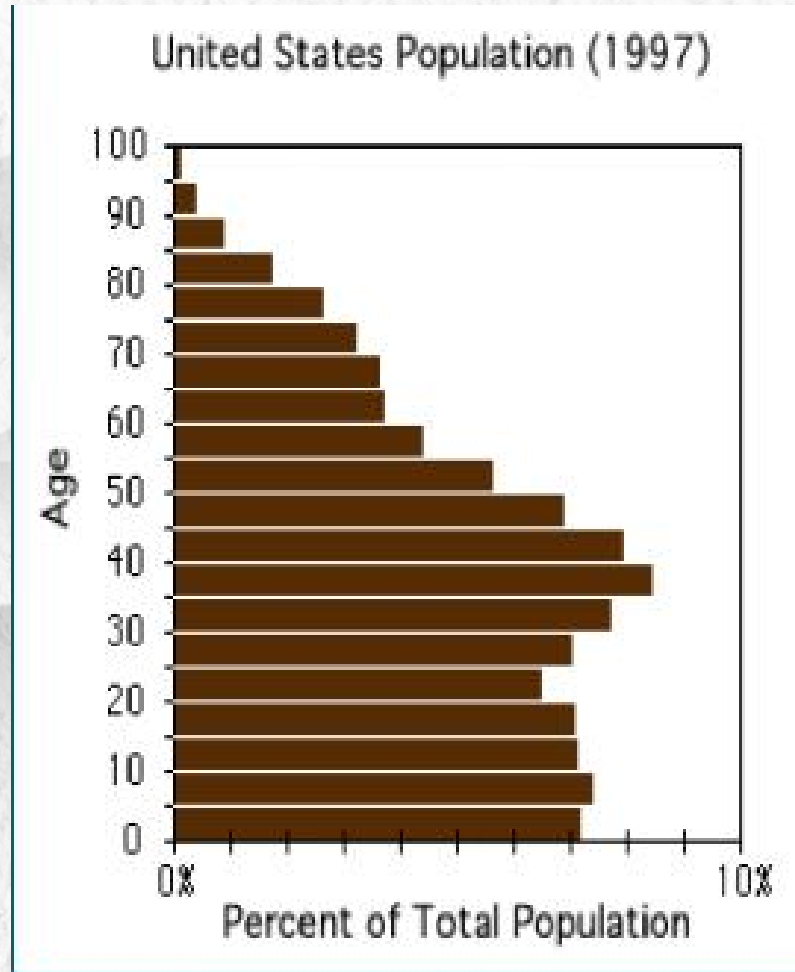
04

Leslie模型





Leslie模型



某两个群体，人口总量相同但年龄分布不同，这两个群体的人口增长趋势相同还是不同，我国的三孩政策，你懂了吗？

A 相同

B 不同

提交



Leslie模型

$$\mathbf{N}_t = \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix}_t$$

$$n_{0,t+1} = F_0 n_{0,t} + F_1 n_{1,t} + \cdots + F_s n_{s,t}$$

$$n_{1,t+1} = p_0 n_{0,t}$$

.....

$$n_{s,t+1} = p_{s-1} n_{s-1,t}$$

F : 各个年龄段的生育率

p : 各个年龄段的存活率 (死亡率)



Leslie模型

$$N_{t+1} = LN_t$$

Leslie矩阵

$$L = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_s \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{s-1} & 0 \end{pmatrix}$$

“所有的模型都是错的，但有些是有用的” 对不对

A 对

B 不对

提交

谢谢聆听

