



# 数学建模

公共教学部

王嫣





01

# 食堂人气排名问题

# 江苏镇江技师学院食堂迎新





## 你为什么喜欢那家食堂

A

经济实惠

B

食材安全, 食堂卫生


C

美味

D

菜品丰盛

提交




## 提出问题

### 食堂人气排名问题

问题： 某大学有三个食堂 $A$ ,  $B$ ,  $C$ , 如何估计在食堂 $A$ ,  $B$ ,  $C$ 的就餐人数, 构建人气排行榜。






## 解决方案

### 解决方案

方案1： 派人在食堂门口蹲守，清点人数。

方案2： 在食堂门口派发问卷，提问下一次如何选择。



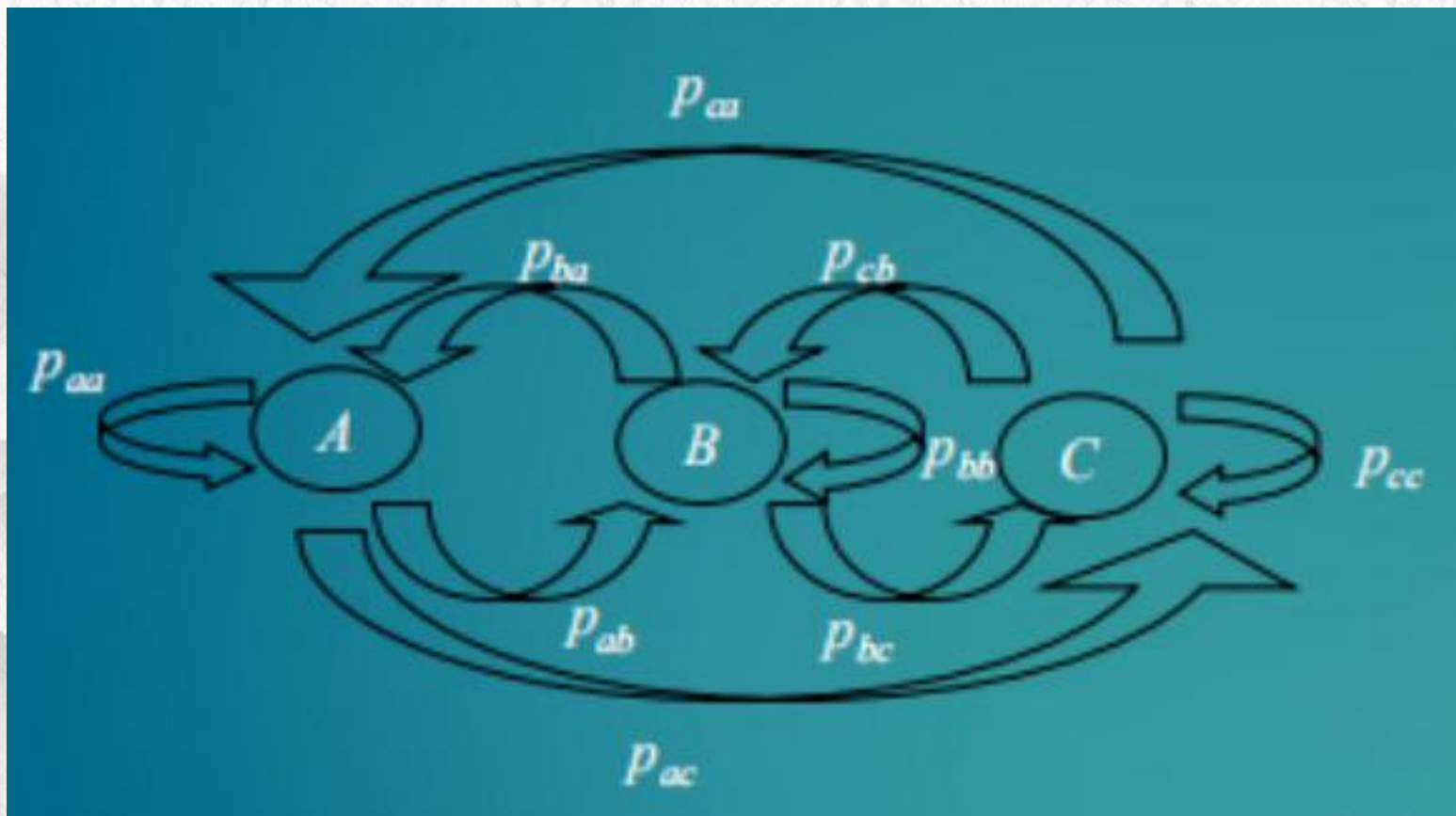
## 调查结果

### 调查结果:

1. 在食堂  $A$  就餐的人中  $p_{aa}$  部分仍然回到食堂  $A$ , 有  $p_{ab}$  部分选择食堂  $B$ ,  $p_{ac}$  部分选择食堂  $C$ ;
2. 在食堂  $B$  就餐的人中  $p_{bb}$  部分仍然回到食堂  $B$ , 有  $p_{ba}$  部分选择食堂  $A$ ,  $p_{bc}$  部分选择食堂  $C$ ;
3. 在食堂  $C$  就餐的人中  $p_{cc}$  部分仍然回到食堂  $C$ , 有  $p_{ca}$  部分选择食堂  $A$ ,  $p_{cb}$  部分选择食堂  $B$ .



# 调查结果





## 数学模型及求解

令  $A_n$  为第  $n$  天在食堂  $A$  就餐的人数所占比例,

令  $B_n$  为第  $n$  天在食堂  $B$  就餐的人数所占比例,

令  $C_n$  为第  $n$  天在食堂  $C$  就餐的人数所占比例,

易得


$$\begin{cases} A_{n+1} = p_{aa}A_n + p_{ba}B_n + p_{ca}C_n \\ B_{n+1} = p_{ab}A_n + p_{bb}B_n + p_{cb}C_n \\ C_{n+1} = p_{ac}A_n + p_{bc}B_n + p_{cc}C_n \end{cases}$$

## 数学模型及求解

$$\begin{aligned} & (A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}) \\ &= (A_n, B_n, C_n) \begin{pmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A_n, B_n, C_n) \\ &= (A_0, B_0, C_0) \begin{pmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{pmatrix}^n \end{aligned}$$





# 数学模型及求解

## 不动点问题

转换成如下的不动点问题：极限是否存在？

如果存在，则满足

$$(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{pmatrix}$$

# 数学模型及求解

## 实例计算

选取初值:  $\pi_0 = (A_0, B_0, C_0) = (1/3, 1/3, 1/3)$

若矩阵  $P$  如下

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 \end{pmatrix}$$



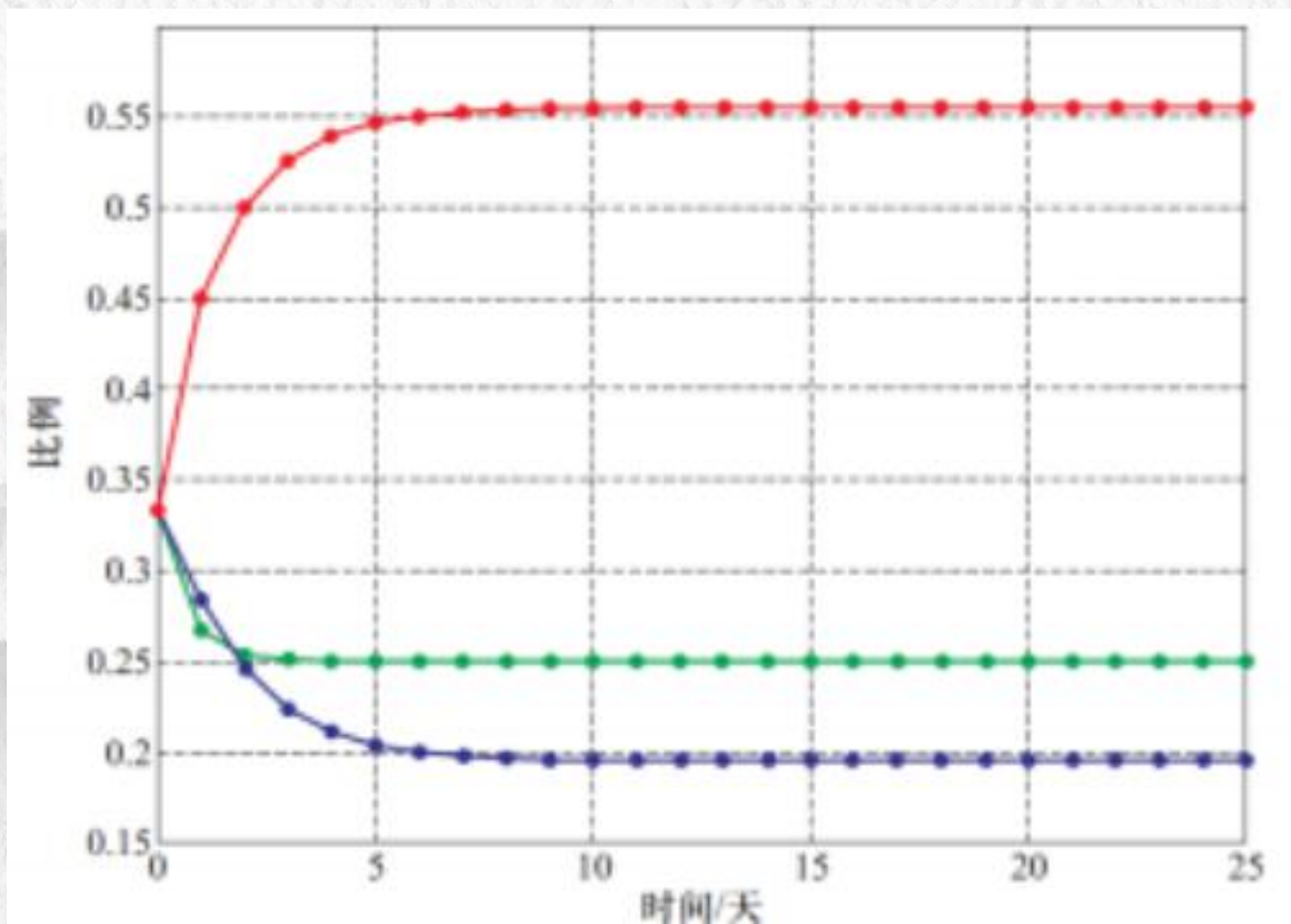
# 数学模型及求解

## 数值计算结果:


$n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
1	0.4500	0.2833	0.2667	11	0.5553	0.1947	0.2500
2	0.5008	0.2458	0.2533	12	0.5554	0.1946	0.2500
3	0.5261	0.2232	0.2507	13	0.5555	0.1945	0.2500
4	0.5395	0.2104	0.2501	14	0.5555	0.1945	0.2500
5	0.5468	0.2032	0.2500	15	0.5555	0.1945	0.2500
6	0.5507	0.1993	0.2500	16	0.5555	0.1945	0.2500
7	0.5529	0.1971	0.2500	17	0.5555	0.1945	0.2500
8	0.5541	0.1959	0.2500	18	0.5555	0.1945	0.2500
9	0.5548	0.1952	0.2500	19	0.5555	0.1945	0.2500
10	0.5551	0.1949	0.2500	20	0.5555	0.1945	0.2500



# 数学模型及求解








# 数学模型及求解

**观察：**

- 1. 三条线最后都几乎是平的：收敛！**
- 2. 三条线都几乎呈幂指数形状：收敛速度很快！**



# 数学模型及求解

## 实例计算

如果更换初值:  $\pi = (A_0, B_0, C_0) = (0.8, 0.1, 0.1)$

矩阵 $P$ 保持不变

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 \end{pmatrix}$$



# 数学模型及求解

数值计算结果：

$n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
1	0.6600	0.1200	0.2200	11	0.5558	0.1942	0.2500
2	0.6070	0.1490	0.2440	12	0.5557	0.1943	0.2500
3	0.5827	0.1686	0.2488	13	0.5556	0.1944	0.2500
4	0.5702	0.1800	0.2498	14	0.5556	0.1944	0.2500
5	0.5636	0.1865	0.2500	15	0.5556	0.1944	0.2500
6	0.5600	0.1901	0.2500	16	0.5556	0.1944	0.2500
7	0.5580	0.1920	0.2500	17	0.5556	0.1944	0.2500
8	0.5569	0.1931	0.2500	18	0.5556	0.1944	0.2500
9	0.5563	0.1937	0.2500	19	0.5556	0.1944	0.2500
10	0.5560	0.1940	0.2500	20	0.5556	0.1944	0.2500

不动点和前面的一样！





# 问题本质抽象

## 问题的特征

1. 每一步活动只与当前处在什么“状态”有关，与过去的“状态”没有关系。
2. 矩阵  $P$  的特殊性：每行和为 1，表示下一个时刻的状态必须在  $A, B, C$  中之一。
3. 马尔可夫链 (Markov Chain) 模型，简称马氏链。



# 北京大学：带你领略北大食堂风味



一入北大深似海，从此减肥是路人，为你赞成的投一票

A

努力考研、读博，进北大

B

北大真好，连食堂都这么吸引人

C

身在日职，心在北大，向着北大努力学习

D

在日职也办美食节

提交



谢谢聆听

