



# 数学建模

公共教学部

王嫣

# 目录

## CONTENTS

- 
- 01 问题的提出
  - 02 卫星的速度
  - 03 火箭的推力
  - 04 火箭系统的质量
  - 05 多级火箭的速度公式
  - 06 三级火箭的最优性

01

问题提出





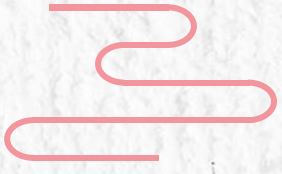
# 问题提出



按用途分为探空火箭和运载火箭。探空火箭指在近太空进行探测、科学试验的火箭，一般不设控制系统，是30~200千米高空的有效探测工具。探空火箭还可按研究对象或用途分如地球物理火箭、气象火箭、生物火箭、技术试验火箭和防雹火箭等。运载火箭又分为卫星运载火箭和载人运载火箭。这段描述对不对

- A 对
- B 不对

提交




## 问题提出

1956年开始火箭的研制工作

1964年6月我国自行研制的中程火箭试飞成功

1970年4月“长征一号”运载火箭诞生，首次成功发射“东方红一号”卫星



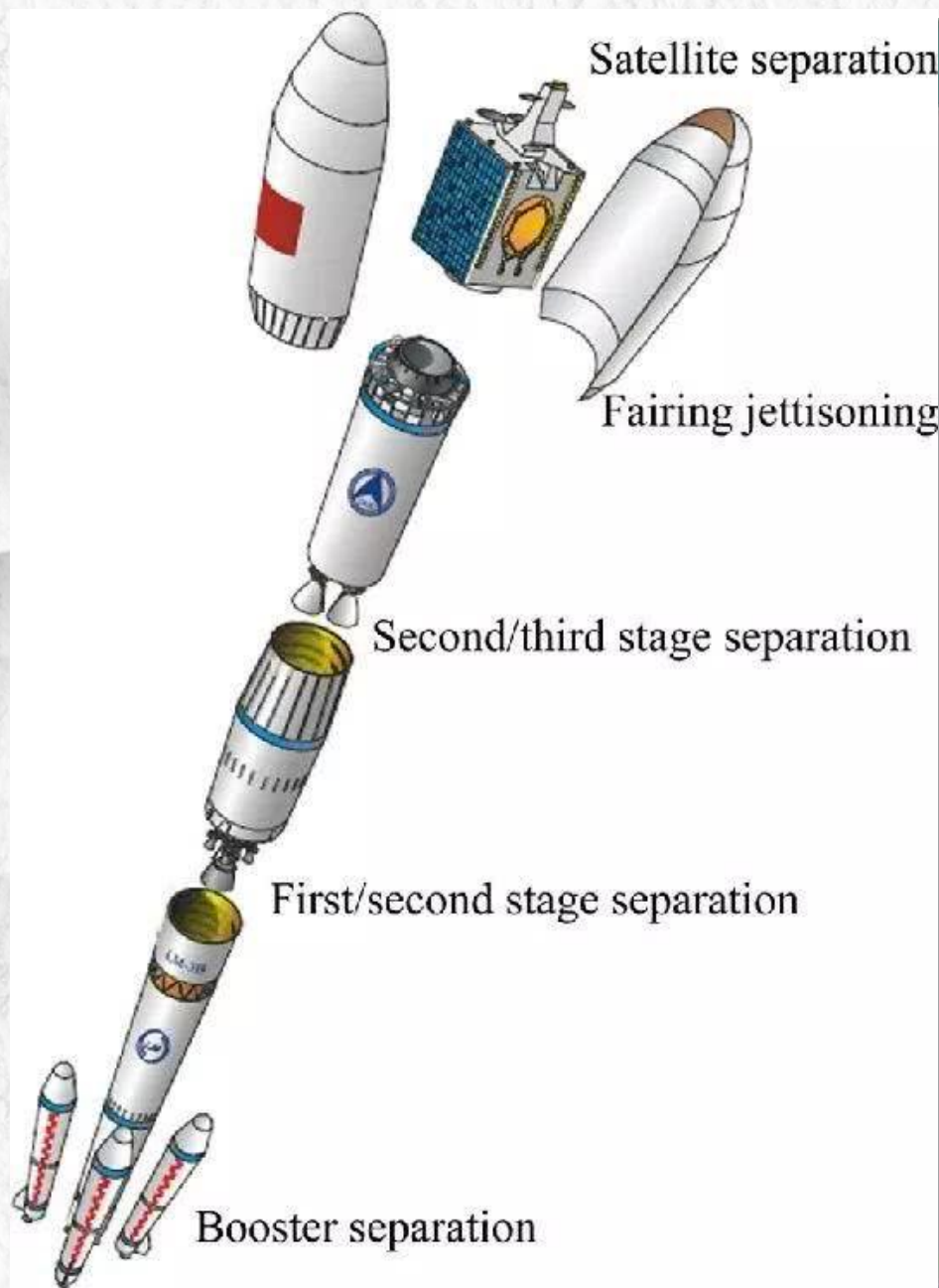
## 问题提出

中国今年来着火箭发射次数上赶超了欧洲，并且“长征二号F”火箭已经成为全球仅有的三种轨道载人运载器之一。

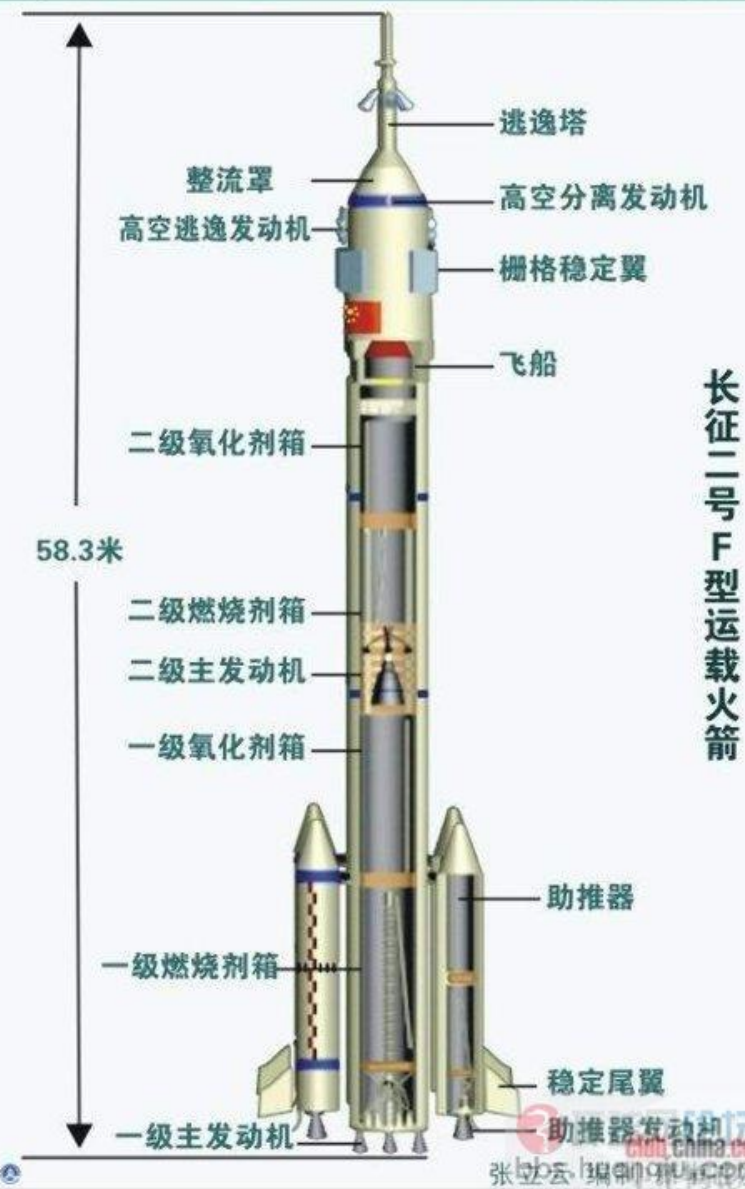
2016年6月，长征七号运载火箭从海南文昌航天发射中心首次发射，603秒成功将载荷送入预定轨道。

# 问题提出

为什么使用三级运载火箭？



## 长征2号F型运载火箭





运载火箭的三级结构问题可以分解为什么小问题

- A 卫星的速度
- B 火箭的推力
- C 火箭与卫星的质量
- D 运载火箭的最佳级数

提交

The background features a traditional Chinese ink wash style illustration. In the upper right corner, there are dark, expressive ink branches of a cherry blossom tree with several pink flowers and scattered petals drifting towards the left. The lower portion of the image shows a series of layered, misty mountain ranges in shades of grey and white, creating a sense of depth and atmosphere. The overall background has a subtle, textured appearance.

02

卫星的速度

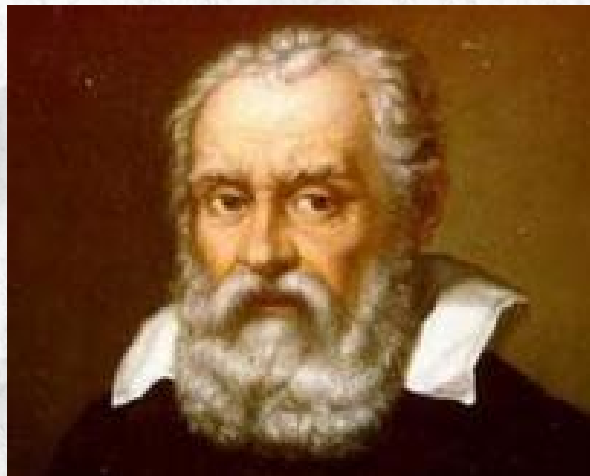
## 卫星的速度



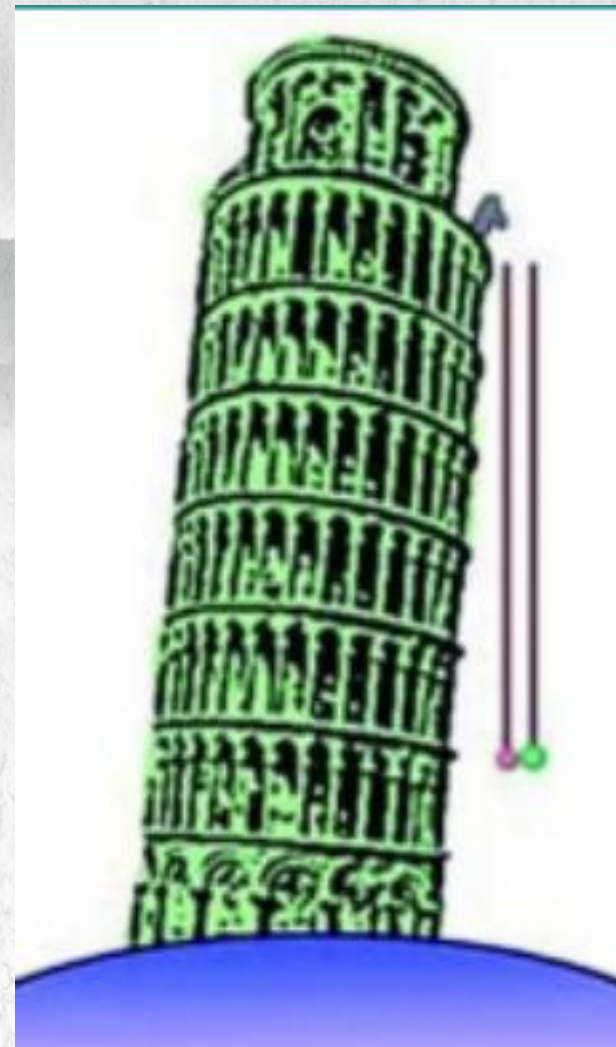
牛顿：万有引力定律  
宇宙万物之间都存在着相互之间的引力，它的作用方向在两点的连线上，它的大小与两者质量的乘积成正比，和两种距离的平方成反比，且比例系数是一个对万物皆相同的宇宙常数。



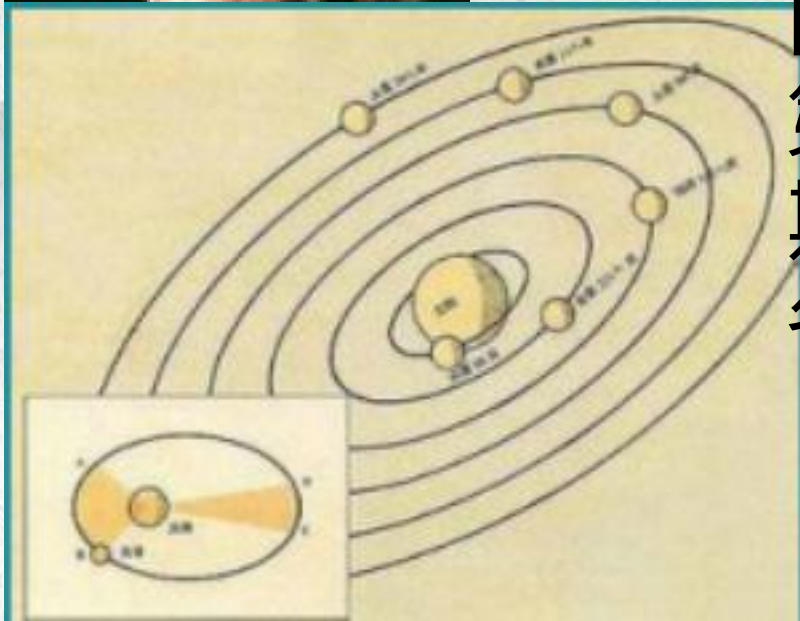
# 卫星的速度



伽利略：自由落体的等加速定律



## 卫星的速度



开普勒：行星运动三定律。

第一定律：行星绕太阳运动的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二定律：太阳和每个行星连接而成的矢径，随着行星的运动，在单位时间内扫过的面积恒为常数。

第三定律：太阳系中各行星的运行周期的平方与轨道长半轴的立方之比对各行星是相同的。



# 卫星的速度

$$G = \gamma \frac{Mm}{r^2} = k \frac{m}{r^2}$$

$\gamma$  —— 万有引力常数

$M$  —— 地球质量

$m$  —— 卫星质量

$r$  —— 卫星到地球中心的距离

$k = \gamma M$  —— 地球引力常数



## 卫星的速度


在地面上,

$$k \frac{m}{R^2} = mg$$

$R$  —— 地球半径

$g$  —— 重力加速度

$$k = gR^2$$



# 卫星的速度

地球对卫星的引力公式

$$G = k \frac{m}{r^2} = mg \left( \frac{R}{r} \right)^2$$

卫星的法向加速度

$$\frac{v^2}{r}$$

$v$  —— 卫星绕地球匀速圆周运动的线速度





# 卫星的速度

由牛顿第二定律

$$m \frac{v^2}{r} = mg \left( \frac{R}{r} \right)^2$$

$$v = R \sqrt{\frac{g}{r}}$$



# 卫星的速度

选取  $r \approx R = 6371 \text{ km}$

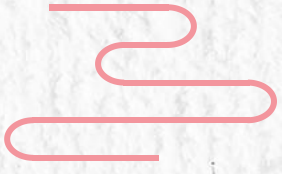
**第一宇宙速度**

$$v = \sqrt{Rg} \approx 7.9 \text{ km/s}$$

03

# 火箭的推力






## 火箭的推力

反冲：一个物体在内力的作用下分裂成两个部分，一部分向某个方向运动，另一部分必然向相反的方向运动。

动量守恒定律：系统中内力作用下，当一部分向某一方向的动量发生变化时，剩余部分沿相反方向的动量发生同样大小的变化。

忽略重力和空气阻力等



## 火箭的推力

微元法：考察时段 $[t, t + \Delta t]$ 中火箭系统的动量变化，  
 $t$ 时刻火箭系统的动量

$$m(t)v(t)$$


$t + \Delta t$ 时刻火箭系统的动量

$$m(t + \Delta t)v(t + \Delta t)$$

喷射出去的燃料的动量

$$(m(t) - m(t + \Delta t))(v(t) - u)$$

$u$  —— 气体喷射相对于火箭的速度



# 火箭的推力

## 由动量守恒定律

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - (m(t + \Delta t) - m(t))(v(t) - u)$$

$$\frac{d(m(t)v(t))}{dt} = \frac{dm(t)}{dt}(v(t) - u)$$

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} = -u \frac{dm(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

$v_0$  —— 火箭的初始速度

$m_0$  —— 火箭系统的初始质量

# 04 火箭系统的质量





# 火箭系统的质量

$m_p$  —— 有效载荷的质量

$m_s$  —— 火箭结构的质量

$m_f$  —— 燃料的质量

火箭系统的初始质量为

$$m_0 = m_p + m_s + m_f$$

$$v = u \ln \frac{m_0}{m_p + m_s}$$





# 火箭系统的质量

**结构比 —— 结构质量在结构和燃料总质量中所占的比例**

$$\lambda = \frac{m_s}{m_s + m_f}$$

**燃料质量在结构和燃料总质量中所占的比例为**

$$1 - \lambda = \frac{m_f}{m_s + m_f}$$



## 火箭系统的质量

$$m_s = \lambda(m_s + m_f) = \lambda(m_0 - m_p)$$

$$\begin{aligned} v &= u \ln \frac{m_0}{m_p + m_s} \\ &= u \ln \frac{m_0}{\lambda m_0 + (1 - \lambda)m_p} \\ &\leq u \ln \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$



# 火箭系统的质量

选取  $u = 3 \text{ km/s}$ ,  $\lambda = 0.1$ ,

$$v \leq u \ln \frac{1}{\lambda} = 3 \ln 10 \approx 7 \text{ (km/s)}$$

**一级火箭无法将卫星送入预定轨道!**



05

## 多级火箭的速度公式

## 多级火箭的速度公式

$n$  —— 火箭级数

$m_i$  —— 第 $i$ 级火箭的结构和燃料的总质量

第 $i$ 级火箭的结构质量为  $\lambda m_i$

第 $i$ 级火箭的燃料质量为  $(1 - \lambda)m_i$

火箭的初始质量为  $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + \cdots + m_n$



## 多级火箭的速度公式

当第1级火箭的燃料消耗完毕时火箭的质量为

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

火箭的速度为

$$v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$



## 多级火箭的速度公式

将第1级火箭的结构抛去，点燃第2级火箭，此时火箭的质量为

$$m_p + m_2 + \cdots + m_n$$

火箭的速度为

$$v_2 = v_1 + u \ln \frac{m_p + m_2 + \cdots + m_n}{m_p + \lambda m_2 + \cdots + m_n}$$

## 多级火箭的速度公式

当第 $n$ 级火箭的燃料耗尽时，火箭的速度为

$$v_n = v_{n-1} + u \ln \frac{m_p + m_n}{m_p + \lambda m_n}$$

$$v = u \ln \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \cdot \frac{m_p + m_2 + \cdots + m_n}{m_p + \lambda m_2 + \cdots + m_n} \cdots \frac{m_p + m_n}{m_p + \lambda m_n} \right)$$





06

## 三级火箭的最优性

## 三级火箭的最优性

对给定的有效载荷如何选择各级火箭的质量，使得总质量达到最小？

已知  $v, u, \lambda, m_p$ ，在约束条件

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$\ln \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \cdot \frac{m_p + m_2 + \cdots + m_n}{m_p + \lambda m_2 + \cdots + m_n} \cdots \frac{m_p + m_n}{m_p + \lambda m_n} \right) = \frac{v}{u}$$


求  $\frac{m_0}{m_p}$  的最小值。

## 三级火箭的最优性

$$\min a_i = \frac{m_p + m_i + \dots + m_n}{m_p + m_{i+1} + \dots + m_n}, \text{ 在约束条件}$$

$$\ln \left( \frac{a_1}{1 + \lambda(a_1 - 1)} \cdot \frac{a_2}{1 + \lambda(a_2 - 1)} \cdots \frac{a_n}{1 + \lambda(a_n - 1)} \right) = \frac{v}{u}$$

求  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的最小值。



## 三级火箭的最优性

再令  $x_i = \frac{1 + \lambda(a_i - 1)}{a_i}$ ，在约束条件

$$x_1 x_2 \cdots x_n = e^{-\frac{v}{u}}$$

求  $(x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) \cdots (x_n - \lambda)$  的最大值。

## 三级火箭的最优性

多级火箭的最优质量比随火箭级数 $n$ 的增大而单调递减。

$n$	1	2	3	4	5	...	$\infty$
$\frac{m_0}{m_p}$	—	149	77	65	60	...	49

# 自力更生成伟业九天揽月梦终圆



以下对神舟载人航天飞船的描述，你认为正确的是

A

中国自行研制，具有完全自主知识产权

B

达到或优于国际第三代载人飞船技术的飞船

C

是由长征二号F火箭发射升空，发射基地是酒泉卫星发射中心

D

2021年6月神舟十二号载人飞船成功将聂海胜、刘伯明、汤洪波送入太空

提交

# 崔蕴：为国家安全着想

CCTV 13  
新闻

CCTV.com



## 德耀中华

第八届全国道德模范评选表彰活动



# 李峰：为火箭打造火眼金睛

CCTV 7

国防军事

CCTV.com

为火箭打造「火眼金睛」

微米之间追求零对零的公差

科技

大国工匠崔蕴、李峰等航天人，有什么值得我们学习的

A

崔蕴在危机关头以国家利益为重，尽职尽责

B

李峰，大国工匠，手艺人，精益求精的工作态度

C

不惧危险，临危不乱，吃苦耐劳

D

别人休息，他废寝忘食钻研机器，钻研手艺，敢于挑战世界纪录

提交

谢谢聆听

