第（1）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第一章第一、二、三节	学时	2 学时
教材和参考书	1.《线性代数》同济大学编		

1. 教学目的：熟练掌握 2 阶, 3 阶行列式的计算；

　　掌握逆序数的定义，并会计算；

　　掌握 n 阶行列式的定义；

2. 教学重点：逆序数的计算；

3. 教学难点：逆序数的计算.

1. 教学内容：二、三阶行列式的定义；全排列及其逆序数；阶行列式的定义

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注

第一节 二、三阶行列式的定义

一、二阶行列式的定义

从二元方程组的解的公式,引出二阶行列式的概念。

设二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,解得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

令 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式 ,则

如果将D中第一列的元素 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2 ,则可得到另一个行列式,用字母 D_1 表示,于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和: $b_1a_{22} - b_2a_{21}$,这就是公式(2)中 x_1 的表达式的分子。同理将 D 中第二列的元素 a_{12}, a_{22} 换成常数项 b_1, b_2 ,可得到另一个行列式,用字母 D_2 表示,于是有

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和: $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$,这就是公式(2)中 x_2 的表达式的分子。

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$ 其中

例 1. 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$.

同样, 在解三元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 时, 要用到"三阶行列式", 这里可采用如下的定义.

二、三阶行列式的定义

设三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

用消元法解得

定义 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$,

称为三阶行列式, 则

三阶行列式所表示的 6 项的代数和, 也用对角线法则来记忆: 从左上角到右下角三个元素相乘取正号, 从右上角到左下角三个

元素取负号,即

例 2. 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$. (-14)

例 3. 求解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$ （$x=2$ 或 $x=3$）

例 4. 解线性方程组 $\begin{cases}-2x+y+z=-2\\ x+y+4z=0\\ 3x-7y+5z=5\end{cases}$.

解 先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & -7 & 5\end{vmatrix}=-10+12-7-3-56-5=-69\neq 0$$

再计算 D_1, D_2, D_3

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -7 & 5\end{vmatrix}=-51，D_2=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 3 & 5 & 5\end{vmatrix}=31，D_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -7 & 5\end{vmatrix}=5$$

得 $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{17}{23}$，$y=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{31}{69}$，$z=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{5}{69}$

第二节 全排列及其逆序数

引例：用 1、2、3 三个数字,可以组成多少个没有重复的三位数？

一、全排列

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列（简称

排列）.

可将n个不同元素按$1\sim n$进行编号, 则n个不同元素的全排列可看成这n个自然数的全排列.

n个不同元素的全排列共有$n!$种.

二、逆序及逆序数

逆序的定义：取一个排列为标准排列, 其它排列中某两个元素的次序与标准排列中这两个元素的次序相反时, 则称有一个逆序.

通常取从小到大的排列为标准排列, 即$1\sim n$的全排列中取$123\cdots(n-1)n$为标准排列.

逆序数的定义：一个排列中所有逆序数的总数称为这个排列的逆序数.

逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 标准排列规定为偶排列.

例 1：讨论$1,2,3$的全排列.

全排列	123	231	312	132	213	321
逆序数	0	2	2	1	1	3
奇偶性	偶			奇		

逆序数的计算：设$p_1p_2\cdots p_n$为$123\cdots(n-1)n$的一个全排列, 则其逆序数为 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$.

其中t_i为排在p_i 前, 且比p_i大的数的个数.

例 2：求排列54321的逆序数.

解： $t=0, t_2=1, t_3=2, t_4=3, t_5=4, t=\sum_{i=1}^{n} t_i=10.$

（对于逆序数的计算介绍另一种算法）

第三节 n阶行列式的定义

下面可用全排列的方式改写二阶, 三阶行列式.

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}.$$

其中：① p_1p_2 是1,2 的全排列, ② t 是 p_1p_2 的逆序数, ③ Σ 是对所有1,2的全排列求和.

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

其中:① $p_1p_2p_3$ 是1,2,3的全排列, ② t 是 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, ③ Σ 是对所有1,2,3的全排列求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3'p_n}.$$

其中:① $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列, ② t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数, ③ Σ 是对所有 $1,2,\cdots,n$ 的全排列求和.

例 1. 计算对角行列式: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$(24)

例 2. 证明对角行列式（其对角线上的元素是λ_i, 未写出的元素都为 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证明：按定义式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda 3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}\lambda_1 \begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} & & \lambda_3 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 3. 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明:按定义式得

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & & 0 \\ a_{43} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

以上, n阶行列式的定义式, 是利用行列式的第一行元素来定义行

列式的, 这个式子通常称为行列式按第一行元素的展开式.

回顾和小结	**小结：** 1. 二三阶行列式的定义； 2. 全排列及其逆序数； 3. n阶行列式的定义。
复习思考题或作业题	**思考题：** 1. 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & -8 & 9\\ 4 & -5 & 6\end{vmatrix}$ 2. 求排列54321的逆序数. **作业题：** 习题一：第 1（1, 3）、2（2, 4, 6）
实施情况及分析	1. 通过学习学员理解了二、三阶行列式和全排列及的定义概念, 会计算二、三阶行列式； 2. 对其逆序数等方面的应用有待加强.

第（ 2 ）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第一章第四、五节	学时	2 学时
教材和参考书	《线性代数》(第 4 版)同济大学编		

1. 教学目的：掌握对换的概念；掌握阶行列式的性质，会利用阶行列式的性质计算阶行列式的值；

2. 教学重点：行列式的性质；

3. 教学难点：行列式的性质.

1. 教学内容：对换；行列式的性质；

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注

第四节　对换

对换的定义：在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.

将相邻两个元素对调，叫做相邻对换.

例：$a_1\cdots a_l\ a\ b\ b_1\cdots b$ ——$a_1\cdots a_l\ \ b\ a\ b_1\cdots b$.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论

奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，

偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明：　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立

定理 2　：n阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

其中t为$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

（以 4 阶行列式为例,对证明过程作以说明）

（补充）定理 3 n阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{p_1q_1} a_{p_2q_{12}} \cdots a_{p_nq_1n}.$$

其中$p_1p_2\cdots p_n$和 $q_1q_2\cdots q_n$是两个n级排列, t为行标排列逆序数与列标排列逆序数的和.

练习：试判断$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$和$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$是否都是六阶行列式中的项.

第五节　行列式的性质

转置行列式的定义

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ （D'）

行列式D^T称为行列式D的转置行列式（依次将行换成列）

一、n阶行列式的性质

性质 1： 行列式与它的转置行列式相等.

由此知，行与列具有同等地位. 关于行的性质，对列也同样成立，反之亦然.

如：$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　　$D^T=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

以 r_i 表示第 i 行，c_j 表示第 j 列. 交换 i,j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记

作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 2：　行列式互换两行（列），行列式变号.

推论：　行列式有两行（列）相同，则此行列式为零.

性质 3：　行列式的某一行（列）的所有元素乘以数 k，等于用数 k 乘以该行列式.

推论：　行列式的某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式符号外.

性质 4：　行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 5：　若行列式中某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和.

即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

则 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

性质 6：　把行列式某一行（列）的元素乘以数 k 再加到另一行（列）上，则该行列式不变.

二、n阶行列式的计算：

例 1. 计算$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解：$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}}{\overset{r_2+r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3+r_4}{\overset{r_2+2r_4}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 .$$

例 2. $$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 \times \frac{1}{a+3b}}{=} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \underset{i=2,3,4}{\overset{r_i-br_1}{=}} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+3b)(a-b) .$$

（推广至n阶，总结一般方法）

例 3. 证明：$\begin{vmatrix} p+q & q+r & r+p \\ p_1+q_1 & q_1+r_1 & r_1+p_1 \\ p_2+q_2 & q_2+r_2 & r_2+p_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$.

证明：左端$$\underset{\text{性质5}}{\overset{\text{第一列}}{=}} \begin{vmatrix} p & q+r & r+p \\ p_1 & q_1+r_1 & r_1+p_1 \\ p_2 & q_2+r_2 & r_2+p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & q+r & r+p \\ q_1 & q_1+r_1 & r_1+p_1 \\ q_2 & q_2+r_2 & r_2+p_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p & q+r & r \\ p_1 & q_1+r_1 & r_1 \\ p_2 & q_2+r_2 & r_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r & r+p \\ q_1 & r_1 & r_1+p_1 \\ q_2 & r_2 & r_2+p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r & p \\ q_1 & r_1 & p_1 \\ q_2 & r_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

例 4. 计算$2n$阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

(利用递推法计算)

例 5. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$.

证明: $D=D_1D_2$.

回顾和小结	**小结：** 对换和n阶行列式的性质与计算 1. 对换的定义及两个定理； 2. n阶行列式的性质与计算；
复习思考题或作业题	**思考题：** 1. 把排列 54132 作一次对换变为 24135, 问相当于作几次相邻对换？把排列 12345 作偶数次对换后得到的新排列是奇排列还是偶排列？ 2. 计算： $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}.$ **作业题：** 习题一：第 3，4（2，4）, 5(2, 4, 5)

实施情况及分析	1. 通过学习学员掌握了n阶行列式的定义和对换的概念； 2. 对利用n阶行列式的定义和对换等方面的应用有待加强.

第（ 3 ）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第一章第六节	学时	2 学时
教材和 参考书	1.《线性代数》(第 4 版)同济大学编；		
1. 教学目的：了解余子式和代数余子式的概念；掌握行列式按行（列）展开； 2. 教学重点：行列式按行（列）展开； 3. 教学难点：行列式按行（列）展开.			

1. 教学内容：行列式按行（列）展开；

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注

第六节　行列式按行（列）展开

定义　在n阶行列式中，把元素a_{ij}所处的第i行、第j列划去，剩下的元素按原排列构成的$n-1$阶行列式，称为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}；而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式.

引理　如果n阶行列式中的第i行除a_{ij}外其余元素均为零，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则：$D=a_{ij}A_{ij}$.

证　先证简单情形：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

再证一般情形：

定理　行列式等于它的任意一行（列）的各元素与对应的代数余子式乘积之和，即

按行：$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

按列：$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

证：

（此定理称为行列式按行（列）展开定理）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots n).$$

例 1 ： $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$

解:

例 2： $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$

解： $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+\cdots+r_n}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$D_n = n+1.$$

从而解得 $D_n = n+1$.

例 3．证明范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} \left(x_i - x_j\right).$$

其中，记号“$\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

证　用归纳法

因为 $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} \left(x_i - x_j\right)$

所以，当 $n=2$ n=2 时，（4）式成立.

现设（4）式对 $n-1$ 时成立，要证对 n 时也成立. 为此，设法把 D_n 降阶；从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2\left(x_2 - x_1\right) & x_3\left(x_3 - x_1\right) & \cdots & x_n\left(x_n - x_1\right) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) & x_3^{n-2}\left(x_3 - x_1\right) & \cdots & x_n^{n-2}\left(x_n - x_1\right) \end{vmatrix}$$

（按第一列展开，并提出因子 $x_i - x_1$）

$$= \left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_1\right)\cdots\left(x_n - x_1\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \left(n-1\right)\text{阶范德蒙行列式}$$

$$\overset{\text{由假设}}{=} \left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_1\right)\cdots\left(x_n - x_1\right) \prod_{n \geq i > j \geq 2} \left(x_i - x_j\right) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} \left(x_i - x_j\right)$$

定理的推论　　行列式一行（列）的各元素与另一行（列）对应各元素的代数余子式乘积之和为零，即

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$

按列： $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$

结合定理及推论，得

$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij},\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij},$ ，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1,(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}.$

例 4. 计算行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}5&3&-1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&-2&3&1&0\\0&-4&-1&4&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}$ 的值。

回顾和小结	**小结：** 行列式按行（列）展开。 1. 余子式和代数余子式的概念; 2. 行列式按行（列）展开;
复习思考题或作业题	**思考题：**设: $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$, 求第一行各元素的代数余子式之和 **作业题：** 习题一:第 7（2，3，5，6）
实施情况及分析	1.通过学习学员理解了余子式和代数余子式的概念，掌握行列式按行（列）展开； 2.对利用行列式按行（列）展开的方法计算行列式等方面的应用有待加强.

第（ 4 ）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第一章第七节	学时	2 学时
教材和参考书	《线性代数》(第 4 版)同济大学编		

1. 教学目的：了解克拉默法则的内容，了解克拉默法则的证明，会利用克拉默法则求解含有个未知数个方程的线性方程组的解；
2. 教学重点：克拉默法则的应用；
3. 教学难点：克拉默法则的应用.

1. 教学内容：克拉默法则；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注
第七节　克拉默法则 含有n个未知数$x_1,x_2,...,x_n$的n个方程的线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_2=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$ 与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用n阶行列式表示. 定理 1（Cramer 法则）如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$ 则方程组(1)有且仅有一组解： $$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D} \qquad (2)$$ 其中$D_j(j=1,2,...,n)$是把系数行列式D中的第j列的元素用方程组右端的常数列代替，而其余列不变所得到的n阶行列式 $$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ (证明在第二章) 当$b_1,b_2,...,b_n$全为零时，即 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$	

称之为齐次线性方程组. 显然，齐次线性方程组必定有解（$x_1=0, x_2=0, ..., x_n=0$）.

根据克拉默法则, 有

1．齐次线性方程组的系数行列式$D\neq 0$时，则它只有零解（没有非零解）

2．反之, 齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式$D=0$.

例 1．求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 8 \\ x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = & 9 \\ & 2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -5 \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

解: 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27\neq 0$$

同样可以计算

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27, \quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$.

注意:

1. 克莱姆法则的条件：n个未知数，n个方程，且$D\neq 0$

2. 用克莱姆法则求解方程组运算量大一般不采用它求解方程

组。

3. 克莱姆法则具有重要的理论意义。

4. 克莱姆法则说明线性方程组的解与它的系数、常数项之间的依存关系.

例 2. 用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6. \end{cases}$$

例 3. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + \quad 2y + 2z = 0 \\ \quad 2x + (6-\lambda)y \quad = 0 \\ \quad 2x + \quad + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

有非零解 ,问λ应取何值?

解 系数行列式

$$D = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

由: $D = 0$,得$\lambda = 2$、$\lambda = 5$、$\lambda = 8$.

回顾和小结	**小结：** 克拉默法则. 1. 内容; 2. 应用.
复习思考题或作业题	**思考题：**当线性方程组的系数行列式为零时,能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何? **作业题：** 习题一第 8（2）、9（2 ,4）
实施情况及分析	1. 通过学习学员理解了解克拉默法则的内容 ,了解克拉默法则的证明 ,会利用克拉默法则求解含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的解; 2. 对利用克拉默法则等方面的应用有待加强.

第（5）次课　 授课时间（　　）

教学章节	第二章第一、二节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1.教学目的：了解矩阵的概念；掌握矩阵的运算； 2.教学重点：矩阵的概念和矩阵的运算； 3.教学难点：矩阵的概念和矩阵的运算。			
1.教学内容：矩阵；矩阵的运算； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示。			

基本内容	备注

第一节　矩阵

一、矩阵的定义

称 m 行、n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

为 $m\times n$ 矩阵，或简称为矩阵；表示为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $A=(a_{ij})$ 或 $A_{m\times n}$；其中 a_{ij} 表示 A 中第 i 行，第 j 列的元素。

其中行列式 $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$ 为按行列式的运算规则所得到的一个数；而 $m\times n$ 矩阵是 $m\times n$ 个数的整体, 不对这些数作运算。

例如，公司的统计报表, 学生成绩登记表等, 都可写出相应的矩阵。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，当

则称矩阵 A 与 B 相等, 记成 $A=B$ 。

二、特殊形式

n阶方阵： $n\times n$ 矩阵

行矩阵 ：$1\times n$矩阵（以后又可叫做行向量），记为

$$A=(a_1,a_{2,},\cdots,a_n)$$

列矩阵 ：$m\times 1$矩阵（以后又可叫做列向量），记为

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

零矩阵 ：所有元素为0的矩阵, 记为O

对角阵 ：对角线元素为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, 其余元素为$D$的方阵，记为

单位阵 ：对角线元素为 1，其余元素为 0 的方阵，记为

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

三、线性变换的系数矩阵

线性变换的定义：设变量$y_1,y_2,...,y_m$能用变量$x_1,x_2,...,x_n$线性表示，即

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n \end{cases}$$

这里$a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$为常数。这种从变量$x_1,x_2,...,x_n$到

变量$y_1,y_2,\dots,y_m$的变换称为线性变换。

线性变换由m个n元函数组成，每个函数都是变量的一次幂，故而称之为线性变换。

上式的系数可构成一个$m\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$称之为线性变换的系数矩阵。

线性变换和系数矩阵是一一对应的。

如, 直角坐标系的旋转变换（变量(x,y)到变量(x',y')的变换）

$$\begin{cases} x'=\cos\theta x+\sin\theta y \\ y'=-\sin\theta x+\cos\theta y \end{cases}$$

的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

恒等变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \quad\vdots \\ y_m = x_m \end{cases}$$

的系数矩阵为

例. $E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

同样，齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

与系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，也是一一对应的.

非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

与增广矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 也是一一对应的。

第二节　矩阵的运算

一、加法

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$， $B = (b_{ij})_{m\times n}$, 都是 $m\times n$ 矩阵, 则加法定义为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

显然,

① $A+B=B+A$，② $(A+B)+C=A+(B+A)$

二、数乘

设λ是数, $A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$矩阵, 则数乘定义为

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然

① $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu)A$， ②$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$， ③$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

三、乘法

乘法运算比较复杂, 首先看一个例子

设变量 t,t_2到变量$x_{1,},x_2,x_3$的线性变换为

$$\begin{cases} x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2 \\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2 \\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2 \end{cases}$$

变量 x_1,x_2,x_3到变量y_1,y_2的线性变换为$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \end{cases}$

那么, 变量 $t_{1,}t_2$到变量$y_{1,}y_2$的线性变换应为

$$\begin{cases} y_1=a_{11}(b_{11}t_1+b_{12}t_2)+a_{12}(b_{21}t_1+b_{22}t_2)+a_{13}(b_{31}t_1+b_{32}t_2) \\ y_1=a_{21}(b_{11}t_1+b_{12}t_2)+a_{22}(b_{21}t_1+b_{22}t_2)+a_{23}(b_{31}t_1+b_{32}t_2) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_1 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases}$$

定义矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} 和 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

的乘积为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

按以上方式定义的乘法具有实际意义. 由此推广得到一般定义

设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$， $B = (b_{ij})_{s\times n}$, 则乘法定义为

$$AB = C$$

其中 $C = (c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{pmatrix}$$

注：两个矩阵相乘要求前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数; 乘积矩阵的行数为前一个矩阵的行数, 列数为后一个矩阵的列数; 乘积矩阵的第 i 行，第 j 列元素为前一个矩阵的第 i 行元素与后一个矩阵的第 j 行元素对应相乘再相加。

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，则

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1 & 1\times1+0\times1+3\times0+(-1)\times3 & 1\times0+0\times3+3\times1+(-1)\times4 \\ 2\times4+1\times(-1)+0\times2+2\times1 & 2\times1+1\times1+0\times0+2\times3 & 2\times0+1\times3+0\times1+2\times4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

例:设 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$，求 AB 及 BA。

解：$AB=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

由此发现：（1）$AB \neq BA$，（不满足交换律）

（2）$A \neq O$，$B \neq O$，但却有 $BA = O$。

一个必须注意的问题 ：

1．若 $A_{m\times s}$， $B_{s\times n}$， ，则 $A_{m\times s}B_{s\times n}$ 成立, 当 $m \neq n$ 时， $B_{s\times n}A_{m\times s}$ 不成立；

2．即使 $A_{m\times n}$， $B_{n\times m}$，则 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 是 m 阶方阵, 而 $B_{n\times m}A_{m\times n}$ 是 n 阶方阵；

3．如果 A, B 都是 n 阶方阵, 例如 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$，则

$AB=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ ，而 $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

综上所述, 一般 $AB \neq BA$（即矩阵乘法不满足交换率）。

下列性质显然成立：

① $(AB)C = A(BC)$，② $\lambda(AB)=(\lambda A)B = A(\lambda B)$，

② $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$

几个运算结果：

1 . $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$；

2. $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$；

3 . 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，E 是 m 阶单位阵，则 $EA=A$；若 E 是 n 阶单位阵，则 $AE=A$；

4. 线性变换的矩阵表示：

$$\text{设}\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n\end{cases},$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix},$$

则 $y=Ax$

5．线性方程组的矩阵表示：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则 $Ax=b$

矩阵的幂：$A^2=AA$，$A^3=AA^2,\cdots$，$A^n=AA^{n-1}$.

例. 证明$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$

证明　用归纳法：$n=1$时，显然成立，假定$n=k$时成立，则$n=k+1$时

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta+\sin\theta\cos k\theta\\ -\sin\theta\cos k\theta-\cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta+\cos\theta\cos k\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta\\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}$$

从而结论成立.

由于$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$是直角坐标旋转$\theta$角度变换的系数矩阵，故而

$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$是旋转了$n\theta$角度变换的系数矩阵.

四、转置

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，记$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1n & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

则称A^T是A的转置矩阵。

显然，

① $(A^T)^T=A$，② $(A+B)^T=A^T+B^T$，③ $(\lambda A)^T=\lambda A^T$，④ $(AB)^T=B^TA^T$。

对称矩阵的定义：若矩阵A满足$A^T=A$（即$a_{ij}=a_{ji}$），则称A是对称阵

例. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 证明 A^TA 是 n 阶对称阵, AA^T 是 m 阶对称阵.

例. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ ，且 $x^Tx=1$，E 为 n 阶单位阵， $H=E-2xx^T$，

证明:① H 是对称阵，② $H^2=E$.

证明 $H^T=(E-2xx^T)^T=E^T-2(xx^T)^T=E-2xx^T=H$ ，

故 H 是对称阵。

$$H^2=(E-2xx^T)^2=E-4xx^T+4xx^Txx^T=E-4xx^T+4x(x^Tx)x^T$$

$$=E-4xx^T+4xx^T=E$$

五、方阵的行列式

A 为 n 阶方阵，其元素构成的 n 阶行列式称为方阵的行列式, 记为 $|A|$ 或 $\det A$。

显然，

① $|A^T|=|A|$，② $|\lambda A^T|=\lambda^n|A|$，③ $|AB|=|A||B|$。

例. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, A^* 称为 A 的伴随阵.

证明：$AA^*=A^*A=|A|E$.

证明　设 $AA^*=C=(C_{ij})$

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}b_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij}$$

$$AA^*=C=c_{ij}=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E$$

设 $A^*A=D=(d_{ij})$

$$d_{ij}=A_{li}a_{1j}+A_{2i}a_{2j}+\cdots A_{ni}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{ki}=|A|\delta_{ji}$$

$$A^*A=D=d_{ij}=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E$$

例. 设 A 为 $n(n>2)$ 阶实方阵, 且 $A\neq O,a_{ij}=A_{ij}$, 求 $|A|$.

解：注意到

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=A^T$$

$$\therefore |A^*|=|A^T|=|A|$$

由 $AA^*=|A|E$，得 $AA^T=|A|E\Rightarrow|A|^2=|A|^n\Rightarrow|A|^2(|A|^{n-2}-1)=0$，

由于 $|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}{}^2>0$, 故 $|A|^{n-2}=1\Rightarrow|A|=1$.

六、共轭矩阵

$A=(a_{ij})$ 为复矩阵, $\overline{a_{ij}}$ 为 a_{ij} 的共轭复数, 则称 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ 为 A 的共轭矩阵.

显然,

$$① \ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}, ② \ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\overline{A}, ③ \ \overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$$

回顾和小结	**小 结：** 矩阵的概念和矩阵的运算： 1. 矩阵的概念； 2. 矩阵的运算；
复习思考题或作业题	**思考题：** 1.矩阵与行列式的有何区别? 2. 设A与B为n阶方阵，问等式 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立的充要条件是什么? **作业题：** 习题二第 2、3、4（2，3，5）、7
实施情况及分析	1 .通过学习使学员理解矩阵的概念,掌握了矩阵的运算； 2.对利用矩阵的运算法则的应用有待加强.

第（6）次课　　授课时间（　　　）

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第二章第三节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》；3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. 教学目的：理解逆矩阵的概念；掌握逆矩阵的性质和计算方法；
2. 教学重点：逆矩阵概念和计算；
3.教学难点：逆矩阵概念和计算。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. 教学内容：逆矩阵；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示。</td></tr>
</table>

基本内容	备注

第三节 逆矩阵

一、逆阵的定义

引入：设给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{n1} \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_{nn} \end{cases}$$

可表示为矩阵方程 $Y = AX$ （1）

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$， $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

由克莱姆法则知, 若$|A| \neq 0$, 则(1)有唯一解。

如果存在n阶方阵C, 使得$CA = E$, 则(1)的解可用矩阵乘积表出：

$$X = CB \qquad （2）$$

称为矩阵方程(2)的解。

定义 设A为n阶方阵, 若存在一个n阶方阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称方阵A可逆, 并称方阵B为A的逆矩阵, 记作$A^{-1} = B$，

若$CA = AC = E$, 则$C = A^{-1}$

性质 1 若A^{-1}存在, 则A^{-1}必唯一.

证明 设B、C都是A的逆阵，则有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \text{（唯一）}.$$

性质 2 若A可逆，则A^{-1}也可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

证明　$\because A$ 可逆, $\therefore AA^{-1}=A^{-1}A=E$, 从而 A^{-1} 也可逆, 且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$。

性质 3 若 A 可逆, 则 A' 可逆, 且 $(A')^{-1}=\left(A^{-1}\right)'$

证明　$\because A^{-1}A=AA^{-1}=E,\quad \therefore (A^{-1}A)'=(AA^{-1})'=E'$

从而 $A'(A^{-1})'=(A^{-1})'A'=E$，于是 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$

性质 4 若同阶方阵 A、B 都可逆，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

证明　$\because (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

所以 AB 可逆, 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

二、逆阵存在的条件及逆阵的求法

定义 3. 由 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 阶方阵, 记作 A^*, 即

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为 A 的伴随矩阵.

例 1. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^*

解:　因为　$A_{11}=-2$，$A_{12}=3$，$A_{13}=-2$，

$A_{21}=-2$，$A_{22}=6$，$A_{23}=-6$，

$A_{31}=2$，$A_{32}=-5$，$A_{33}=4$

所以 $$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

定理 方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$ 且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

证明

必要性： A 可逆, 即有 A^{-1} 存在, 使得 $AA^{-1}=E$，

两边取行列式得 $|A||A^{-1}|=E=1\neq 0$

故 $|A|\neq 0$

充分性：由行列式的性质 7 和 Laplace 定理知

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

于是 $$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{pmatrix}=|A|E$$

因为 $|A|\neq 0$，故有 $A\cdot\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{A^*}{|A|}\cdot A=E$

从而 $$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$$

推论 设 A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=E$，（或 $BA=E$），则 $B=A^{-1}$。

证明：$\because$ $|AB|=|A||B|=|E|=1$，$\therefore |A|\neq 0$，故 A^{-1} 存在。

于是 $B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}\left(AB\right)=A^{-1}E=A^{-1}$

注：求 A^{-1} 时，只需要验算 $AB=E$，计算量减半。

例 2. 判断下列方阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&2\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&3&2\\-11&15&1\\-3&3&-1\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求其逆阵。

解：$\because$ $|A|=-2\neq 0$，$|B|=0$，所以 B 不可逆，A 可逆，并且

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\3&6&-5\\-2&-6&4\end{pmatrix}$$

三、用逆矩阵法解线性方程组

在第一节中，线性方程组(1)可表示为矩阵方程 $AX=B$ (2)，若 $|A|\neq 0$，则 $X=A^{-1}B$ (3)，得到(1)的解。

例 3. 解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=2\\3x_1+4x_2+3x_3=3\end{cases}$$

解：其矩阵式为 $\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&2\\3&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

因 $\begin{vmatrix}3&2&1\\1&2&2\\3&4&3\end{vmatrix}=-2$，

所以 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&2\\3&4&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\3&6&-5\\-2&-6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以其解为 $x_1=0, x_2=0, x_3=1$

例 4. 求解矩阵方程 $AXB=C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&2\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&2\end{pmatrix}.$$

解：易知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&3&-2\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$，则

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&6\\5&-3\\2&-1\end{pmatrix}$$

回顾和小结	**小结：** 1．逆矩阵的概念 2．矩阵可逆的充分必要条件 3．利用伴随矩阵求逆矩阵
复习思考题或作业题	**思考题：**试分析以下给出的解答的错误,并给出正确的解答. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$，求 A^{-1} 错误解法:由于 $\|A\|=11\neq 0$,所以 A^{-1} 存在 $A_{11}=5$，$A_{12}=-3$，$A_{21}=2$，$A_{22}=1$ 故有 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\|A\|}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ **作业题：** 习题 11-1 第 3（1,3）、4（2,4）
实施情况及分析	1.通过学习学员理解逆矩阵的概念和矩阵可逆的充分必要条件,会利用伴随矩阵求逆矩阵； 2.对利用伴随矩阵求逆矩阵等方面的应用有待加强。

第（7）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第二章第四节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》；3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1.教学目的：掌握矩阵分块法的运算性质和方法；

2.教学重点：矩阵分块；

3.教学难点：矩阵分块的方法。

5. 教学内容：矩阵分块法；

6. 时间安排：2 学时；

7. 教学方法：讲授与讨论相结合；

3. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示。

基本内容	备注

第四节　矩阵分块法

引例：设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

可按以下方式分块，每块均为小矩阵：

$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ，$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ ，$A_{21}=(a_{31} \quad a_{32})$，$A_{22}=(a_{33} \quad a_{34})$，

则 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$。

矩阵分块法是用若干条横线和若干条竖线将矩阵分割成几个小矩阵。矩阵分块法的运算性质：

1．加法：

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{s1} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{s1} \end{pmatrix}$,

则 $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{r1} \\ \cdots & . & \cdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{s1}+B_{s1} \end{pmatrix}$.

2．数乘：

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{s1} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 是数，则 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{s1} \end{pmatrix}$.

3．乘法：

设 $A_{m\times l}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$，$B_{l\times m}=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$，则 $A_{m\times l}B_{l\times n}=C_{m\times n}$

其中$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{s\gamma} \end{pmatrix}$， $C_{ij}=\sum_{k-1}^{t} A_{ik}B_{kj}, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots r$

4．转置：

设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则$A^T=\begin{pmatrix} A^T{}_{11} & \cdots & A^T{}_{sr} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^T{}_{1r} & \cdots & A^T{}_{sr} \end{pmatrix}$

5．对角分块的性质：

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，其中$A, A_1, \cdots, A_s$均为方阵，则

$|A|=|A_1||A_2|,\cdots,|A_s|$ 。

若A可逆，则$A^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}{}_1 & & & \\ & A^{-1}{}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{-1}{}_s \end{pmatrix}$

例: $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求A^{-1}。

解 ：设$A_1=5$， $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，则$A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$。

$A_1^{-1}=\frac{1}{5}$， $A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ，则$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

例　设$X=\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$， A,C为可逆方阵, 求X^{-1}。

解　设$X^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$，则由$XX^{-1}=E$得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}$$，其中 $E=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}$,

按乘法规则，得

$$\begin{cases} AX_{11}=E \\ AX_{12}=O \\ BX_{11}+CX_{21}=O \\ BX_{12}+CX_{22}=E \end{cases}$$

解得： $X_{11}=A^{-1}$， $X_{12}=O$ ， $X_{21}=-C^{-1}BA^{-1}$ ， $X_{22}=C^{-1}$

故 $X^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$。

例 设 $A^T A=O$，证明 $A=O$.

几个矩阵分块的应用：

1．矩阵按行分块：

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，记 $a_i^{\ T}=(a_{i1},a_{i2,},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots m$ ，

则 $A=\begin{pmatrix} a_1^{\ T} \\ a_2^{\ T} \\ \vdots \\ a_m^{\ T} \end{pmatrix}$

矩阵按列分块：

记 $a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},j=1,2,\cdots n$

则 $A=(a_1,a_{2,},\cdots,a_n)$。

2．线性方程组的表示：

设 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

若记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则线性方程组可表示为 $Ax = b$。

若记 $A = \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ \vdots \\ a_m{}^T \end{pmatrix}$，则线性方程组可表示为 $\begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ \vdots \\ a_m{}^T \end{pmatrix} x = b$ 或

$a_i{}^T x = b_i, (i = 1,2,\cdots m)$。

若记 $A = (a_1, a_{2,}, \cdots, a_n)$，则线性方程组可表示为

$(a_1, a_{2,}, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ 或 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_n a_n = b$。

3．矩阵相乘的表示：

设 $A = \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ \vdots \\ a_m{}^T \end{pmatrix}$，$B_{l\times n} = (b_1, b_{2,}, \cdots, b_n)$，

则 $AB = \begin{pmatrix} a_1{}^T b_1 & a_1{}^T b_2 & \cdots & a_1{}^T b_n \\ a_2{}^T b_1 & a_2{}^T b_2 & \cdots & a_2{}^T b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m{}^T b_1 & a_m{}^T b_2 & \cdots & a_m{}^T b_n \end{pmatrix}$

设 $A_{m\times s} = (a_1, a_{2,}, \cdots, a_s)$，$B_{s\times n} = \begin{pmatrix} \beta_1{}^T \\ \beta_2{}^T \\ \vdots \\ \beta_s{}^T \end{pmatrix}$，

则 $AB = a_1\beta_1^{\ T} + a_2\beta_2^{\ T} + \ldots + a_s\beta_s^{\ T}$ ，其中 a_i 是 $m\times 1$ 矩阵，$\beta_i^{\ T}$ 是 $1\times n$ ，$a_i\beta_i^{\ T} i = (1,2,\cdots,s)$ 是 $m\times n$

4．对角阵与矩阵相乘：

$$\Lambda_m A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\ T} \\ a_2^{\ T} \\ \vdots \\ a_m^{\ T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1^{\ T} \\ \lambda a_2^{\ T} \\ \vdots \\ \lambda a_m^{\ T} \end{pmatrix},$$

$$A_{m\times n}\Lambda_m = (a_1, a_{2,}, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\ T} \\ a_2^{\ T} \\ \vdots \\ a_m^{\ T} \end{pmatrix} = (\lambda a_1, \lambda a_{2,}, \cdots, \lambda a_n)。$$

回顾和小结	**小结：** 矩阵分块法 1．运算性质； 2．方法；
复习思考题或作业题	**思考题：**设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$,其中 B,C 都是可逆矩阵。 证明 A 可逆, 并求 A^{-1}. **作业题：** 习题二第 26、29、30。
实施情况及分析	1. 通过学习学员掌握矩阵分块法的运算性质和方法； 2. 对矩阵分块法的应用方面有待加强.

第（9）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第三章　第3节	学时	2学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1.教学目的：掌握矩阵秩的定义,会求矩阵的秩.

2.教学重点：求矩阵的秩；

3.教学难点：求矩阵的秩

1. 教学内容：矩阵的秩；

2. 时间安排：2学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注
第三节　矩阵的秩	

定义 1. 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m,k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义 2 如果在矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有的 $r+1$ 阶子式都等于 0，则称 D 为 A 的一个最高阶非零子式. 数 r 称为矩阵 A 的秩，矩阵 A 的秩记成 $R(A)$. 零矩阵的秩规定为 0 .

注解：1. 规定零矩阵的秩规定为 0.

2. 若 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, r=n,$ 称 A 为满秩矩阵.

3. 若 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, r<n,$ 称 A 为降秩矩阵.

4. $.R(A^T)=R(A)$.

例1 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4}=\begin{pmatrix}3&2&1&1\\0&0&0&0\\4&4&-2&3\end{pmatrix}$

其中三阶子式共有4个其值均为0,例如

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\0&0&0\\4&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&1\\0&0&0\\4&4&-2\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}3&2&1\\0&0&0\\4&4&3\end{vmatrix}=0\cdots\Rightarrow r<3$$

再观察二阶子式 $\begin{vmatrix}3&2\\4&4\end{vmatrix}=4\neq 0,$

$\Rightarrow R(A)=r=2.$

例2 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 2\\ 4 & 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$

其中三阶子式共有4个其值均为0,例如

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 4 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix}=0\cdots\Rightarrow r<3$$

再观察二阶子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4\neq 0,$

$\Rightarrow R(A)=r=2.$

例3 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

其中三阶子式共有4个其值均为0,例如

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\end{vmatrix}=0,\cdots\Rightarrow r<3$$

再观察二阶子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\cdots\Rightarrow r<2$

再观察一阶子式$|1|\neq 0,\Rightarrow r=1.$

$\Rightarrow R(A)=r=1.$

注

利用定义求A秩时，要从高阶向低阶逐个子式进行检验;

如果$k+1$阶子式均为0，而某个k阶子式不等于0,

则R（A）$=r=k$.（这是很麻烦的求秩方法！）

例 4. 求矩阵 A 和 B 的秩, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

问题：经过初等变换矩阵的秩变吗？

定理　若 $A\sim B$, 则 $R(A)=R(B)$.

初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例 5. 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

例 6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 及矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

例 7. 设 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&\lambda&-1&2\\5&3&\mu&6\end{pmatrix}$, 已知 $R(A)=2$, 求 λ 与 μ 的值.

矩阵的秩的性质

(1). $0\le R(A_{m\times n})\le\min\{m,n\}$;

(2). $R(A^T)=R(A)$;

(3). 若 $A\sim B$, 则 $R(A)=R(B)$

(4). 若 P、Q 可逆, 则 $R(PAQ)=R(A)$.

(5). $\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$

(6). $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

(7). $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$;

(8). 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 则 $R(A)+R(B)\le n.$

例 8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明 $R(A+E)+R(A-E)\ge n.$

证明 因 $(A+E)+R(A-E)=2E.$ 由性质(6)，有

$R(A+E)+R(A-E)\ge R(2E)=n,$ 而 $R(E-A)=R(A-E),$

所以 $R(A+E)+R(A-E)\ge n.$

求秩方法：用初等变换把矩阵 A 化成行阶梯形矩阵，矩阵 A 的秩 = 此行阶梯形矩阵的秩（据定理 1 ）. 行阶梯形矩阵的秩 = 其非零行的行数（定义 2）

满秩阵

由 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$

得到以下等价命题.

若 A 满秩 $r(A)=n\Leftrightarrow$ 必有 $|A|\ne 0$;

$\Leftrightarrow A^{-1}$ 必存在；

$\Leftrightarrow A$ 为非奇异阵；

$\Leftrightarrow A$ 必能化为单位阵 E_n

课堂练习题

求以下矩阵的秩：

$$1.A=\begin{pmatrix} -8 & 8 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 12 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 2.B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

回顾和小结	1. 矩阵秩的定义； 2. 利用初等行变换求矩阵的秩
复习思考题或作业题	1. 复习思考题： $m\times n$矩阵A的$\boldsymbol{k}$阶子式共有多少个？ 2. 作业题：P79 8，9，11
实施情况及分析	1. 通过2小时学习，大部分学员初步掌握了矩阵秩的定义,会利用初等变换求小型矩阵的秩. 2. 对求矩阵的秩的运算速度、准确性有待加强。

第（10）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第三章 第 4 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1.教学目的：求解一般线性方程组的方法； 2.教学重点：线性方程组的求解方法、步骤； 3.教学难点：线性方程组的求解。			
1.教学内容：线性方程组的解 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示.			

基本内容	备注

第四节　线性方程组的解

线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$称为$n$元齐次线性方程组.

记$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

A称为方程组的系数矩阵. 于是，这个齐次方程组可以记为$Ax=0$.

定理 2　n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是系数矩阵A的秩$R(A)<n$.

证明　必要性　设方程组$Ax=0$ 有非零解. 用反证法来证明$R(A)<n$. 假设$R(A)=n$ ，那么在A中应有一个n阶子式 $|D|\neq 0$. 根据 Cramer 法则，D所对应的n个方程构成的齐次线性方程组只有零解，从而原方程组$Ax=0$ 也只有零解，矛盾. 故 $R(A)<n$.

充分性　设$R(A)=r<n$, 对A施行初等行变换得到行阶梯形矩阵A_1. 那么A_1只含 r个非零行，

不妨设为$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

于是齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $\begin{cases} x_1+b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ x_2+b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r+b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n=0 \end{cases}$ 同解.

把它改写成 $\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n \\ x_2=-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n \end{cases}$

这个方程组有 $n-r>0$ 个自由未知量，因此有非零解.

故 $Ax=0$ 有非零解.

关于齐次线性方程组的结论

- 方程组仅有零解的充分必要条件是 $R(A)=n$;
- 方程组有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$;
- 当齐次线性方程组中未知量的个数大于方程个数时，

必有 $R(A)<n$;这时齐次线性方程组一定有非零解.

例 1. 三元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3=0 \\ x_1+3x_2-9x_3=0 \end{cases}$ 是否有非零解？

解：由 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可知 $R(A)=2<3$，所以此齐次线性方程组有非零解.

例2. 当 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

解：用初等行变换化系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\3&2&3\\0&1&\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&1&4\\0&1&\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&1&4\\0&0&\lambda-4\end{pmatrix}$$

可知，当$\lambda=4$时，$R(A)=2<3$．所以，当$\lambda=4$时,齐次线性方程组有非零解.

例 3．求解下列齐次线性方程组

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0,\\2x_1+5x_2+2x_3=0,\\3x_1-x_2-4x_3=0,\\4x_1+9x_2-4x_3=0.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0.\end{cases}$

解：（1）

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&2\\3&-1&-4\\4&9&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&8\\0&-7&5\\0&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+7r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&8\\0&0&61\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得$R(A)=3$, 而$n=3$, 故方程组只有零解:

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0.$$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{4})\times r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得$R(A)=2$, 而$n=4$, 故方程组有非零解, 通解中含有$4-2=2$个任意常数 .

原方程组的同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0,\\x_3=0.\end{cases}$

取 x_2, x_4 为自由未知量(一般取行最简形矩阵非零行的第一个非零元对应的未知量为非自由的)，令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$，则方程组的全部解(通解)为

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + c_2, \\ x_2 = \quad c_1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = \qquad c_2. \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

或写成(向量)形式 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $(c_1, c_2$ 为任意常数)

齐次方程组求解方法:

用矩阵初等行变换将系数矩阵化成行阶梯形矩阵, 根据系数矩阵的秩可判断原方程组是否有非零解. 若有非零解, 继续将行阶梯形化为行最简形矩阵, 则可求出方程组的全部解(通解).

n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

A 称为非齐次线性方程组的系数矩阵，B 称为增广矩阵. 于是，这个非齐次方程组可以记为 $Ax = b$ 其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

定理 3　n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$，其中 $B=(A\vdots b)$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵.

证明　必要性

设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解，要证 $R(A)=R(B)$.

用反证法，假设 $R(A)<R(B)$，　则 B 可化成 行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是得到与原方程组 $Ax=b$ 同解的方程组：

$$\begin{cases}x_1+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\ x_2+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=1\end{cases}$$

因为它含有矛盾方程 $0=1$ ，所以这个方程组无解，这与原方程组有解矛盾．故 $R(A)=R(B)$.

充分性　设 $R(A)=R(B)=r$.

用初等行变换化增广矩阵 B 为行阶梯形矩阵 B_1，则 B_1 中含 r 个非零行 .

不妨设 B_1 为 $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B_1 对应的方程组为 $\begin{cases} x_1=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ x_2=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases}$

这个方程组有解. 它与原方程组 $Ax=b$ 同解，所以非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解.

由上述证明还可得，n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(B)=n$.

关于非齐次线性方程组的结论

- 方程组无解充分必要条件是 $R(A)\neq R(A \vdots \boldsymbol{b})$
- 方程组有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A \vdots \boldsymbol{b})=n$
- 方程组有无穷多组解的充分必要条件是 $R(A)=R(A \vdots \boldsymbol{b})=r<n$，且在任一解中含有 $n-r$ 个任意常数 .

3. 判断下列非齐次线性方程组是否有解

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=2 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=8 \\ \quad 5x_2-4x_3+5x_4=7 \end{cases}$$

解:用初等行变换化其增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\3&-1&5&-3&6\\2&1&2&-2&8\\0&5&-4&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&5&-4&0&0\\0&5&-4&0&4\\0&5&-4&5&7\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&5&-4&0&0\\0&0&0&5&7\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

由此可知，$R(A)=3$，$R(B)=4$， 即 $R(A)\neq R(B)$，方程组无解.

例 4 . a,b 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

解：用初等行变换把增广矩阵化为行阶梯形矩阵，

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

由此可知：

（1）当 $a\neq-1$ 时，$R(A)=R(B)=4$，方程组有唯一解；

（2）当 $a\neq-1$，$b\neq0$ 时，$R(A)\neq R(B)$，方程组无解；

（3）当 $a=-1$，$b=0$ 时，$R(A)=R(B)=2<4$，方程组有无穷多个解。

例 5．求解下列非齐次线性方程组

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 4, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

解：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1}]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{(-\frac{1}{2}) \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-\frac{1}{11}) \times r_3]{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得 $R(A) = R(\overline{A}) = 3$，而 $n = 3$，故方程组有解，且解唯一:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2.$$

(2)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -10 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 2\\0 & -10 & 8 & -3\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

可得 $R(A)=2$，$R(\overline{A})=3$，故方程组无解.

(3) $$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -3 & -2\\1 & -1 & 1 & 5 & 4\\-4 & 4 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -3 & -2\\0 & 0 & 2 & 8 & 6\\0 & 0 & -3 & -12 & -9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -3 & -2\\0 & 0 & 1 & 4 & 3\\0 & 0 & -3 & -12 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 4 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可得 $R(A)=R(\overline{A})=2$，而 $n=4$，故方程组有解，且有无穷多解，通解中含有 $4-2=2$ 个任意常数.

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_4=1,\\x_3+4x_4=3.\end{cases}$$

取 x_2,x_4 为自由未知量（一般取行最简形矩阵非零行的第一个非零元对应的未知量为非自由的），

令 $x_2=c_1,x_4=c_2$，则方程组的全部解（通解）为

$$\begin{cases}x_1=1+c_1-c_2,\\x_2=\quad c_1,\\x_3=3\quad -4c_2,\\x_4=\qquad c_2.\end{cases}\quad (c_1,c_2\text{为任意常数})$$

或写成（向量）形式 $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-4\\1\end{pmatrix}.\quad (c_1,c_2\text{为任意常数})$$

例 6．取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=1,\\x_1+kx_2+x_3=k,\\x_1+x_2+kx_3=k^2.\end{cases}$$

(1)有唯一解? (2)无解? (3)有无穷多解? 有解时求出全部解.

解：方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}.$$

(1)当 $R(A)=R(\overline{A})=3$, 即当 $|A|\neq 0$ 时, 方程组有唯一解.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2(k+2),$$

所以，当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

由于 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix}=-(k-1)^2(k+1)$, $D_2=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2$,

$$D_3=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix}=(k-1)^2(k+1)^2,$$

根据克拉默法则, 得到唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|A|}=-\frac{k+1}{k+2}, \qquad x_2=\frac{D_2}{|A|}=\frac{1}{k+2}, \qquad x_3=\frac{D_3}{|A|}=\frac{(k+1)^2}{k+2}.$$

（2）当 $k=-2$ 时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3+r_2+r_1}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

可得 $R(A)=2$, $R(\overline{A})=3$, 故方程组无解.

(3)当 $k=1$ 时, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可得 $R(A)=R(\overline{A})=1<3$, 故方程组有无穷多解, 通解中含有 $3-1=2$ 个任意常数.

令 $x_2=c_1, x_3=c_2$, 则 方 程 组 通 解 为

$$\begin{cases} x_1=1-c_1-c_2, \\ x_2= \quad c_1, \\ x_3= \qquad c_2. \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\ (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

回顾和小结	一、线性方程组解的存在与判定定理： 1、齐次 2、非齐次 二、求线性方程组的解的步骤
复习思考题或作业题	2. 复习思考题： P81　18，19，20 2. 作业题：P80　12（3），13（1），14，16
实施情况及分析	1. 通过2小时学习，大部分学员初步掌握了利用初等变换判断求解线性方程组的方法； 2. 利用初等变换判断求解线性方程组的方法还需要通过多做题来掌握。

第（11）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第四章第 1 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1.教学目的：了解 n 维向量的基本概念，理解线性组合、线性表示、向量组等价的定义； 2.教学重点：线性表示和向量组等价的定义、定理； 3.教学难点：向量组线性表示、向量组等价的证明。			
1.教学内容：向量组及其线性组合； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示.			

基本内容	备注
第一节 向量组及其线性组合 一、n维向量 定义1 n个有次序的数$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$所组成的数组称为n维向量 这n个数称为该向量的n个分量 第i个数a_i称为第i个分量 分量全为实数的向量称为实向量 分量为复数的向量称为复向量 n维向量可写成一行 也可写成一列 按第二章中的规定 分别称为行向量和列向量 也就是行矩阵和列矩阵 并规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算 因此n维列向量$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$与$n$维行向量$a^T=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$总看作是两个不同的向量 本书中 列向量用黑体小写字母a, b, α, β等表示 行向量则用$a^T, b^T, \alpha^T, \beta^T$等表示 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时 都当作列向量 几何中 “空间”通常是作为点的集合 即作为“空间”的元素是点 这样的空间叫做点空间 我们把3维向量的全体所组成的集合 $$R^3=\{r=(x, y, z)^T \mid x, y, z \in R\}$$ 叫做三维向量空间 在点空间取定坐标系以后 空间中的点	

$P(x,y,z)$与 3 维向量空 $r=(x,y,z)^T$ 之间有一一对应 的关系 因此 向量空间可以类比为取定了坐标系的点空间 在讨论向量的运算时 我们把向量看作有向线段 在讨论向量集时 则把向量 r 看作以 r 为向径的点 P 从而把点 P 的轨迹作为向量集的图形 例如点集

$$\Pi=\{P(x,y,z)\mid ax+by+cz=d\}$$

是一个平面（a,b,c 不全为 0） 于是向量集

$$\{r=(x,y,z)^T\mid ax+by+cz=d\}$$

也叫做向量空间 R^3 中的平面 并把 Π 作为它的图形

类似地 n 维向量的全体所组成的集合

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_i\in R\}$$

叫做 n 维向量空间 n 维向量的集合

$$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b\}$$

叫做 n 维向量空间 R^n 中的 $n-1$ 维超平面

二、向量组的概念

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组

矩阵与向量组的对应

一个 $m\times n$ 矩阵的全体列向量是一个含 n 个 m 维列向量的向量组 它的全体行向量是一个含 m 个 n 维行向量的向量组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} (a_{11} \ \ a_{12} \ \ \cdots \ \ a_{1n}) \\ (a_{21} \ \ a_{22} \ \ \cdots \ \ a_{2n}) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ (a_{m1} \ \ a_{m2} \ \ \cdots \ \ a_{mn}) \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

m 个 n 维列向量所组成的向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 构成一个 $n\times m$ 矩

阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$；

n 个 m 维行向量所组成的向量组 $B:\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots\beta_m^T$ 构成一个 $m\times n$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T\\ \boldsymbol{\beta}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^T\end{pmatrix}$$

又如线性方程 $Ax=0$ 的全体解当 $R(A)<n$ 时是一个含无限多个 n 维列向量的向量组

三、向量组的线性组合与线性表示

定义 2　给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 表达式

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合　$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这线性组合的系数

给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使

$$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合　这时称向量 b 能由向量组 A 线性表示

向量 b 能由向量组 A 线性表示，也就是方程组

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=b \quad \text{有解}$$

定理 1 向量 b 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的秩等于矩阵 $B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$ 的秩　即 $R(A)=R(B)$

四、向量组的等价性

定义 3　设有两个向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$　　若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示　　则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示　　若向量组 A 与向量组 B 能相互表示　　则称这两个向量组等价

把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 和 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$　　B 组能由 A 组线性表示　　即对每个向量 $b_j (j=1,2,\cdots,l)$ 存在数 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{mj}$　使

$$b_j = k_{1j}a_1 + k_{2j}a_2 + \cdots + k_{mj}a_m = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \cdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$$

从而 $$(b_1, b_2, \cdots, b_l) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}$$

这里　　矩阵 $K_{m\times l}=(k_{ij})$ 称为这一线性表示的系数矩阵

由此可知　　若 $C_{m\times n} = A_{m\times l}B_{l\times n}$　　则矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示　　B 为这一表示的系数矩阵

设 $A_{m\times l}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_l)$　　$C_{m\times n}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$　　则 $C_{m\times n} = A_{m\times l}B_{l\times n}$

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

$$c_j = b_{1j}\boldsymbol{a}_1 + b_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{lj}\boldsymbol{a}_l \ (j=1, 2, \cdots, n).$$

同时　　C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示　　A 为这一表示的系矩阵　　设 $B_{l\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_l^T \end{pmatrix}$　　$C_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^T \\ \boldsymbol{\gamma}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m^T \end{pmatrix}$　　则 $C_{m\times n} = A_{m\times l}B_{l\times n}$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1^T\\ \boldsymbol{\gamma}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\gamma}_m^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T\\ \boldsymbol{\beta}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_l^T\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i^T=a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1^T+a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2^T+\cdots+a_{il}\boldsymbol{\beta}_l^T(i=1,2,\ \cdots,m)$$

设矩阵 A 与 B 行等价　即矩阵 A 经初等行变换变成矩阵 B　则 B 的每个行向量都是 A 的行向量组的线性组合　即 B 的行向量组能由 A 的行向量组线性表示　由于初等变换可逆　知矩阵 B 亦可经初等行变换变为 A　从而 A 的行向量组也能由 B 的行向量组线性表示　于是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价

类似可知　若矩阵 A 与 B 列等价　则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价

向量组的线性组合、线性表示及等价等概念　也可移用于线性方程组　对方程组 A 的各个方程作线性运算所得到的一个方程就称为方程组 A 的一个线性组合　若方程组 B 的每个方程都是方程组 A 的线性组合　就称方程组 B 能由方程组 A 线性表示　这时方程组 A 的解一定是方程组 B 的解　若方程组 A 与方程组 B 能相互线性表示　就称这两个方程组可互推　可互推的线性方程组一定同解

按定义 3　向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示　其涵义是存在矩阵 $K_{m\quad l}$　使 $(b_1,b_2,\cdots,b_l)=(a_1,a_2,\cdots,a_m)K$ 也就是矩阵方程

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)X=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$$

有解　由上章定理 7　立即可得

定理 2　向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_l)$ 的秩　即 $R(A)=R(A,B)$

推论　向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$与向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_m$等价的充分必要条件是$R(A)=R(B)=R(A,B)$　其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵

证明　因为A组和B组能相互线性表示　依定理2　知它们等价的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,B) \text{ 且 } R(B)=R(B,A)$$

$$\text{而}\quad R(A,B)=R(B,A)$$

即得充分必要条件为$R(A)=R(B)=R(A,B)$.

例1．设$a_1=(1,1,2,2)^T$，$a_2=(1,2,1,3)^T$，$a_3=(1,-1,4,0)^T$，$b=(1,0,3,1)^T$证明向量B能由向量组a_1, a_2, a_3线性表示　并求出表示式

解：根据定理1　要证明矩阵$A=(a_1, a_2, a_3)$与$B=(A,b)$的秩相等　为此　把B化成行最简形

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见$R(A)=R(B)$　因此向量b能由向量组a_1, a_2, a_3线性表示

由上列行最简形　可得方程$(a_1, a_2, a_3)x=b$的通解为

$$\mathbf{x}=c\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3c+2 \\ 2c-1 \\ c \end{pmatrix}$$

从而得表示式

$$b=(a_1, a_2, a_3)x=((-3c+2)a_1+(2c-1)a_2+ca_3$$

其中c可任意取值

例2．设$a_1=(1,-1,1,-1)^T$，$a_2=(3,1,1,3)^T$，$b_1=(2,0,1,1)^T$，$b_2=(1,1,0,2)^T$ $b_3=(3,-1,2,0)^T$，证明向量组a_1, a_2与向量组b_1, b_2, b_3等价

证明　记 $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2,b_3)$　根据定理 2 的推论　只要证明 $R(A)=R(B)=R(A,B)$，为此把矩阵 (A,B) 化成行阶梯形

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见　$R(A)=2$，$R(A,B)=2$

由于矩阵 B 中有不等于 0 的 2 阶子式　故 $R(B)\ge 2$　又 $R(B)\le R(A,B)=2$　于是知 $R(B)=2$　因此 $R(A)=R(B)=R(A,B)$

定理 3　设向量组 $B: b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示　则 $R(b_1,b_2,\cdots,b_l)\le R(a_1,a_2,\cdots,a_m)$

证明　记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m), B=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$

按定理的条件　根据定理 2 有 $R(A)=R(A,B)$　而 $R(B)\le R(A,B)$　因此

$$R(B)\le R(A)$$

前面我们把定理 1 与上章定理 5 对应　把定理 2 与上章定理 7 对应　而定理 3 可与上章定理 8 对应　事实上　按定理 3 的条件　知有矩阵 K，使 $B=AK$　从而根据上章定理 8　即有 $R(B)\le R(A)$

上述各定理之间的对应，其基础是向量组与矩阵的对应，从而有下述对应

向量组 $B: b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示

有矩阵 K，使 $B=AK$

方程 $AX=B$ 有解

要掌握上述对应关系，须注意两个方面　一方面是把向量组的关系用矩阵及其运算表达出来，另一方面是给矩阵及其运算以几

何解释

例 3. 设 n 维向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$，$n$ 阶单位矩阵 $E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的列向量叫做 n 维单位坐标向量　证明　n 维单位坐标向量组能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A) = n$.

证明　根据定理 2　向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A) = R(A, E)$

而 $R(A, E) > R(E) = n$　又矩阵 (A, E) 含 n 行　知 $R(A, E) \le n$ 合起来有 $R(A, E) = n$　因此条件 $R(A) = R(A, E)$ 就是 $R(A) = n$

本例用方程的语言可叙述为

方程 $AX = E$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = n$

本例用矩阵的语言可叙述为

对矩阵 $A_{m \times n}$　存在矩阵 $Q_{n \times l}$　使 $AQ = E_m$ 的充分必要条件是 $R(A) = m$

对矩阵 $A_{m \times n}$　存在矩阵 $P_{n \times m}$　使 $PA = E_n$ 的充分必要条件是 $R(A) = n$

显然　当 $m = n$ 时　P, Q 便是 A 的逆阵　故上述结论可看作是逆矩阵概念的推广

给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和向量 b，若存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ 使

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots\cdots + \lambda_m a_m$$

则称向量 b 能由向量组 A 线性表示

例 4　设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

因为$b=2a_1-a_2$，所以向量β能由向量组α_1,α_2线性表示.

向量$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$不能由向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$线性表示.

也就是说非齐次线性方程组 $x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$ 无解.

向量$b=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$能由向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}3\\0\\4\\1\end{pmatrix}$线性表示,

就是说非齐次线性方程组$x_1a_1+x_2a_2=b$ 有解.

一般地， 向量b能由向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示的充分必要条件是非齐次线性方程组$x_1a_1+x_2a_2+\cdots\cdots+x_ma_m=b$ 有解. 据第 3 章定理 3，所以有

定 理 1 向 量 b 能 由 向 量 组 A 线 性 表 示 的 充 要 条 件 是 $R(A)=R(B)$, 其中矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$.

例 5.. 设向量 $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}2\\6\\8\\7\end{pmatrix}$, 向量组 A: $a_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$,

$a_3=\begin{pmatrix}3\\5\\2\\-4\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\\5\end{pmatrix}$.问向量 b能否由向量组$A$线性表示？

解： $B=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\3&-1&5&-3&6\\2&1&2&-2&8\\0&5&-4&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&5&-4&0&0\\0&0&0&5&7\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$

由此可知，$R(A)=3$，$R(B)=4$，即 $R(A)\neq R(B)$，因此向量b不能由向量组A线性表示.

回顾和小结	维向量的基本概念 2.线性组合、线性表示和向量组等价的定义
复习思考题或作业题	1. 复习思考题： P109　9，10 2. 作业题：P108　2，3，4，6，7
实施情况及分析	1.通过 2 小时学习，大部分学员理解了线性组合、线性表示以及向量组等价的定义； 2.对相关概念的理解、准确记忆还需课下加强。

第（12）　　授课时间（ ）

教学章节	第四章第 2、3 节	学时	2 学时
教材和 参考书	1.《线性代数》(第 4 版)同济大学编；		

1.教学目的：理解向量组的线性相关、最大无关组与向量组的秩的概念；

2.教学重点：向量组的线性相关性的定义及判断定理，最大无关组的求法；

3.教学难点：向量组的线性相关性的定义及判断定理。

1. 教学内容：向量组线性相关性，向量组的秩；

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注
第二节　向量组的线性相关性 定义　给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 $$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$$ 则称向量组 A 是线性相关的　否则称它线性无关 说向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关　通常是指 $m \geq 2$ 的情形　但定义 4 也适用于 $m = 1$ 的情形　当 $m = 1$ 时　向量组只含一个向量　对于只含一个向量 a 的向量组　当 $a = 0$ 时是线性相关的　当 $a \neq 0$ 时是线性无关的　对于含 2 个向量 a_1, a_2 的向量组　它线性相关的充分必要条件是 a_1, a_2 的分量对应成比例　其几何意义是两个向量共线　3 个向量线性相关的几何意义是三向量共面 向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m (m \geq 2)$ 线性相关　也就是在向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示　这是因为 如果向量组 A 线性相关　则有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 $$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$$ 因为 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为 0　不妨设 $k_1 \neq 0$　于是便有 $$\boldsymbol{a}_1 = \frac{-1}{k_1}(k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m)$$ 即 a_1 能由 $a_2, a_3, \cdots, a_m$ 线性表示 如果向量组 A 中有某个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示　不妨设 a_m 能由 $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ 线性表示　即有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}$ 使	

$$a_m=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_{m-1}a_{m-1}$$

于是 $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_{m-1}a_{m-1}+(-1)a_m=0$

因为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1},-1$这$m$个数不全为 0 所以向量组$A$线性相关

向量组的线性相关与线性无关的概念也可移用于线性方程组 当方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时 这个方程就是多余的 这时称方程组(各个方程)是线性相关的 当方程组中没有多余方程 就称该方程组(各个方程)是线性无关(或线性独立)

向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 构成矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 向量组 A 线性相关 就是齐次线性方程组

$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$ 即 $Ax=0$ 有非零解

定理 向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的秩小于向量个数 m 向量组线性无关的充分必要条件是 $R(A)=m$.

例 1. 试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性

解: n 维单位坐标向量组构成的矩阵为

$$E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

是 n 阶单位矩阵 由 $|E|=1\neq 0$ 知 $R(E)=n$ 即 $R(E)$ 等于向量组中向量个数 故由定理 4 知此向量组是线性无关的

例 2. 已知 $a_1=(1,1,1)^T$, $a_2=(0,2,5)^T$, $a_3=(2,4,7)^T$,

试讨论向量组 a_1,a_2,a_3 及向量组 a_1,a_2 的线性相关性

解: 对矩阵 (a_1,a_2,a_3) 施行初等行变换变成行阶梯形矩阵 即可同时得出矩阵 (a_1,a_2,a_3) 及 (a_1,a_2) 的秩 利用定理 4 即可得出结论

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\overset{r_3-\frac{5}{2}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1,a_2,a_3)=2$　　故向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关　　同时可见 $R(a_1,a_2)=2$　　故向量组 a_1,a_2 线性无关

例 3. 已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关　　$b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_1$　　试证向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关

证明一　设有 x_1,x_2,x_3 使

$$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$$

即　$$x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$$

亦即　$$(x_1+x_3)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0$$

因为 a_1,a_2,a_3 线性无关　　故有　$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$

由于此方程组的系数行列式　$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$

故方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$　　所以向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关

证明二

把已知的三个向量等式写成一个矩阵等式

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作 $B=AK$　　设 $Bx=0$，将 $B=AK$ 代入得 $A(Kx)=0$。因为矩阵 A 的列向量组线性无关　　所以可推知 $Kx=0$　　又因 $|K|=2\neq0$　　知方程 $Kx=0$ 只有零解 $x=0$　所以矩阵 B 的列向量

组b_1,b_2,b_3线性无关

证三　把已知条件合写成

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作$B=AK$　因为$|K|=2\neq 0$，知K可逆　根据上章所述矩阵的性质 4 知 $R(B)=R(A)$

因为A的列向量组线性无关　根据定理 4 知$R(A)=3$　从而$R(B)=3$　定理 4 知B的列向量线性无关　即b_1,b_2,b_3线性无关

本例给出三种证法　这三种证法都是常用的　证明一的关键步骤是　按定义4把证明向量线性无关转化为证明齐次线性方程没有非零解；证明二的证明过程与证明一相同　只是在叙述时改用矩阵形式；证明三也采用矩阵形式　并用了矩阵的秩的有关知识　还用了定理 4　从而可以不涉及线性方程而直接证得结论

线性相关是向量的一个重要性质　下而介绍与之有关的一些简单的结论

定理 5　(1) 若向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关　则向量组$B:a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$也线性相关　反之　若向量组$B$线性无关　则向量组$B$也线性无关

(2) m个n维向量组成的向量组　当维数n小于向量个数m时一定线性相关　特别地　$n+1$个n维向量一定线性相关

(3) 设向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关　而向量组$B:a_1,a_2,\cdots,a_m,b$线性相关　则向量b必能由向量组A线性表示

且表示式是唯一的

证明　这些结论都可利用定理 4 来证明

(1)　记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1})$

有 $R(B)\le R(A)+1$　若向量组 A 线性相关　则根据定理 4　$R(A)<m$　从而 $R(B)\le R(A)+1<m+1$　因此根据定理 4 知向量组 B 线性相关

结论(1)是对向量组增加 1 个向量而言的　增加多个向量结论也仍然成立　即设向量组 A 是向量组 B 的一部分(这时称 A 组是 B 组的部分组)　于是结论(1)可一般地叙述为　一个向量组若有线性相关的部分组　则该向量组线性相关　特别地　含零向量的向量组必线性相关　一个向量组若线性无关　则它的任何部分组都线性无关

(2)　m 个 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 构成矩阵 $A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 有 $R(A)\le m$　若 $n<m$　则 $R(A)<m$　故 m 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关

(3) 记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$　有 $R(A)\le R(B)$　因 A 组线性无关　有 $R(A)=m$　因 B 组线性相关　有 $R(B)<m+1$　所以 $m\le R(B)<m+1$　即有 $R(B)=m$

由 $R(A)=R(B)=m$　根据上章定理 4　知方程组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)x=b$$

有唯一解　即向量 b 能由向量组 A 线性表示　且表示式是唯一的

例 4.　设向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关　向量组 a_2,a_3,a_4 线性无关

证明　(1)　a_1 能由 a_2,a_3 线性表示

(2)　a_4 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示

证明 (1) 因a_2,a_3,a_4线性无关　由定理5(1)知a_2,a_3线性无关　而a_1,a_2,a_3线性相关　由定理5(3)知a_1能由a_2,a_3线性表示　(2)用反证法　若a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示　由(1)知a_1能由a_2,a_3线性表示　故a_4能由a_2,a_3线性表示　与a_2,a_3,a_4线性无关矛盾

第三节 向量组的秩

一、最大无关组与向量组的秩

定义5 设有向量组A，如果在A中能选出 r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r$,满足

（1）向量组A_0： $a_1,a_2,\cdots,a_r$,线性无关,

（2）向量组A中任意$r+1$个向量（如果有$r+1$个向量的话）都是线性相关的;

那末称A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组, 简称最大无关组。 最大无关组所含向量的个数r称为向量组A的秩, 记为R_A。

只含零向量的向量组没有最大无关组, 规定它的秩为0。

一般来说, 向量组的最大无关组不是唯一的

二、矩阵的秩与向量组秩的关系

定理　矩阵的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行量组的秩.

证明　设矩阵$A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，且$R(A)=r$，并设$r$阶子式$D_r\neq 0$.据定理 2可知, D_r所在的r个列向量线性无关. 又由

于 A 中所有的 r 阶子式都为 0, 再由定理 2 知, A 中的任意 $r+1$ 个列向量都线性相关. 因此, D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组, 所以 A 的列向量组的秩等于 r.

类似的可证, 矩阵 A 的行向量组的秩也等于矩阵 A 的秩 $R(A)$.

例 5. 求下列向量组的秩和它的一个最大无关组：

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\6\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-9\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\6\end{pmatrix}.$$

解：组成矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 用初等行变换把 A 变成行阶梯形矩阵.

$$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(A)=3$, 所以, 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的秩等于 3 .

因为, 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 构成的矩阵经初等行变换可以变成

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以, 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 的秩为 3, 因此向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关。于是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的一个最大无关组。

三、最大无关组的等价定义

定义 设有向量组 A_0：$a_1,a_2,\cdots,a_r$, 是向量组 A 的一个部分组, 且满足

（1）向量组 A_0 线性无关,

（2）向量组 A 中的任个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那末称 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组。

例 6. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2 \qquad -x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$$

的全体解向量构成的向量组为 S，求 S 的秩。解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是得同解方程组 $\begin{cases} x_1=3x_3-4x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \end{cases}$

令 $x_3=c_1$， $x_4=c_2$，得通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

记 $\xi_1=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

则 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，于是 $S=\{X=c_1\xi_1+c_2\xi_2 \mid c_1,c_2\in\Re\}$

即 S 能由向量组 ξ_1,ξ_2 线性表示。又因为 ξ_1,ξ_2 的四个分量显然不成比例，故 ξ_1,ξ_2 线性无关，从而 ξ_1,ξ_2 是 S 的最大无关组，$R_S=2$。

定理2　向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示的充要条件是　$R(a_1,a_2,\cdots,a_m)=R(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_l)$

定理3' 若向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，则 $R_B \le R_A$。 例 7. 设向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，且它们的秩相等，证明向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价。 例 8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示。	

回顾和小结	1. 向量组的线性相关性定义； 2. 向量组的线性相关性定理； 3. 向量组的秩概念； 4. 向量组的秩的求法；
复习思考题或作业题	2. 复习思考题： 若 $R(A)=r$ 则 $\boldsymbol{A}$ 有没有 r 阶的余子式？ 2. 作业题： P109　13（1），14（2），15

复习思考题或作业题	1. 通过学习，学员们初步理解向量组的线性相关性与线性无关性的概念及其简单性质。了解向量组的相关性的判定定理、向量组的秩概念以及求法； 2. 对向量组的线性相关性的判定方法以及向量组的秩求法方面有待加强。

第（13）次课　授课时间（　　）

教学章节	第四章 第 7 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1. 教学目的：掌握齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念；会求齐次线性方程组的基础解系和通解；掌握非齐次线性方程组解的结构并会求解非齐次线性方程组； 2. 教学重点：求解齐次及非齐次线性方程组的基础解系和通解； 3. 教学难点：求解齐次及非齐次线性方程组的基础解系和通解.			

1. 教学内容：线性方程组的解的结构；

2. 时间安排：2 小时；

3. 教学方法：讲授;

4. 教学手段:板演与多媒体相结合。

基本内容	备注
第四节　线性方程组的解的结构 设有n元齐次线性方程组　$Ax=0$　　(1) 若$x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$是（1）的解，记$\xi=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$称为方程组（1）的解向量. 齐次方程组的解的性质：	

性质 1　若ξ_1,ξ_2为（1）的两个解（向量），则$\xi_1+\xi_2$也是（1）的解.

性质 2　若ξ为（1）的解（向量），k为任意实数，则$k\xi$也是（1）的解.

如果(1)的全体解向量所组成的集合记为U，则U是一个向量空间. 称为齐次方程组 (1) 的解空间.

齐次方程组(1)的解空间U的一个基也称为齐次方程组(1)的一个基础解系. 具体说，如果$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是(1)的一组解向量，且满足

[1] 向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$组线性无关；

[2] 齐次方程组(1)的每个解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性表示；

那么称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为齐次方程组(1)的一个基础解系.

如果$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是齐次方程组(1)的一个基础解系，那么(1)的所有解都可表为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_n$为任意实数, 称上式为齐次方程组(1)的通解.

定理 6　n元齐次线性方程组　$$Ax=0 \qquad (1)$$

的解空间的维数为$n-r$，即(1)的基础解系含$n-r$个解，其中$R(A)=r$.

证明　设$R(A)=r$，用初等行变换化系数矩阵A为行最简形矩阵，不妨令为

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{1,r+1}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&0&b_{2,r+1}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&b_{r,r+1}&\cdots&b_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{2}$$

于是得到与⑴同解的方程组：

$$\begin{cases}x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{1n}x_n\\x_2=-b_{2,r+1}x_{r+1}-b_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{rn}x_n\end{cases}\tag{3}$$

对自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 分别取值

$$\begin{pmatrix}x_{r+1}\\x_{r+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

代入⑶的右端依次可得：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\-b_{2,r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\-b_{2,r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}\end{pmatrix},\quad\cdots,\begin{pmatrix}-b_{1n}\\-b_{2n}\\\vdots\\-b_{rn}\end{pmatrix}.$$

于是得到⑶的 $n-r$ 个解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\\x_{r+1}\\x_{r+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\-b_{2,r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\-b_{2,r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\begin{pmatrix}-b_{1n}\\-b_{2n}\\\vdots\\-b_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

下面证明解向量组

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\-b_{2,r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\-b_{2,r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1n}\\-b_{2n}\\\vdots\\-b_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是(3)的一个基础解系，从而它们也是(1)的一个基础解系.

首先，据定理 3(2)可知，$\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

其次证明(3)的任意解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

设 $\xi=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_r\\\lambda_{r+1}\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ 是(3)的一个解. 根据齐次方程组解的性质可知，向量

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

也是(3)的一个解，由于 η 与 ξ 的后面的 $n-r$ 个分量对应相等，因此

$$\xi=\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

即 ξ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示.

这就证明了, $\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组（3），从而也是齐次方程组（1）的一个基础解系， 所以，(1) 的基础解系含 $n-r$ 个解.

例 1.　求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

解: 对系数矩阵 A 作初等行变换, 将其变为行最简形矩阵, 得

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2&3\\3&2&-1&2\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-1&-4&5\\0&-1&-4&5\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-1&-4&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&-1&-4&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是得同解方程组 $\begin{cases}x_1=3x_3-4x_4\\x_2=-4x_3+5x_4\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，可得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$,即得基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

并得方程组的通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\xi_1+c_2\xi_2,\quad c_1,c_2\in R.$

例 2. 设 ξ_1,ξ_2 是齐次方程组的一个基础解系，证明 $\xi_1+\xi_2,k\xi_2$ 也是这个方程组的一个基础解系,其中数 $k\neq 0$.

证明 根据齐次方程组解的性质可知，$\xi_1+\xi_2,k\xi_2$ 也是齐次方程组 $Ax=0$ 的两个解．因为 ξ_1,ξ_2 是基础解系，所以向量组 ξ_1,ξ_2 线性无关. 因此向量组 $\xi_1+\xi_2,k\xi_2$ 也线性无关，于是 $\xi_1+\xi_2,k\xi_2$ 是此齐次方程组的两个线性无关的解.

因为 $Ax=0$ 的基础解系含有两个解，因此它的两个线性无关的解 $\xi_1+\xi_2,k\xi_2$ 也是基础解系.

设非齐次线性方程组 $\quad Ax=b \qquad\qquad (4)$

（4）的解也记为向量.

非齐次线性方程组的解具有性质：

性质 3　设 η_1,η_2 都是（4）的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次方程组

$$Ax = 0 \qquad (5)$$

的解.

性质 4 设η是（4）的解，ξ是（5）的解，则$\eta+\xi$是（4）的解.

若η^*是（4）的一个解，则（4）的任意一个解η都可以表示为

$\eta=\eta^*+\xi$ ，其中ξ是（5）的某个解.

由此及性质 4 可知，非齐次线性方程组（4）的通解为

$$\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots\cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是（5）的一个基础解系，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意实数.

例 3. 求解方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+5x_4=1 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=4 \end{cases}$

解：用初等行变换把增广矩阵 B 变为行最简形

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知$R(B)=R(A)=2$，所以方程组有解，并得同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-7-2x_2+x_3 \\ x_4=3 \end{cases}$$

取$x_2=0,x_3=0$，即得方程组的一个解$\eta^*=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

对应的齐次方程组为$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_3 \\ x_4=\qquad 0 \end{cases}$，可得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

方程组的通解为$\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi$，$c_1,c_2\in R.$

也就是 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\3\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in R$$

也可以把方程组$\begin{cases}x_1=-7-2x_2+x_3\\x_4=3\end{cases}$

写成 $$\begin{cases}x_1=-7-2x_2+x_3\\x_2=\qquad\quad x_2\\x_3=\qquad\qquad\quad x_3\\x_4=\ \ 3\end{cases}$$

也就是$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}x_1=-7-2x_2+x_3\\x_2=\qquad\quad x_2\\x_3=\qquad\qquad\quad x_3\\x_4=\ \ 3\end{cases}$

得通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\3\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in R$

例 4. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad\qquad+(1+\lambda)x_3=\lambda\\x_1+x_2+(1-2\lambda-\lambda^2)x_3=3-\lambda-\lambda^2\\\qquad\qquad\lambda x_2-\lambda x_3=3-\lambda\end{cases}$$

问λ取何值时，方程组有唯一解，无解，有无穷多解？在有无穷多解时求其通解.

解： 用初等行变换化增广矩阵为行阶梯形

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1&1-2\lambda-\lambda^2&3-\lambda-\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&\lambda&3-\lambda^2\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&(1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

由此可知

1. 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-3$时，$R(A)=R(B)=3$,方程组有唯一解.

2. 当$\lambda=0$时，$R(A)=1,R(B)=2,R(A)\neq R(B)$,方程组无解.

3. 当$\lambda=-3$时，$R(A)=R(B)=2$,方程组有无穷多个解.

此时，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\1 & 1 & -2 & -3\\0 & -3 & 3 & 6\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\0 & 1 & -1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

有同解方程组$\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=-2+x_3\end{cases}$

此方程组得通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad c\in R.$

回顾和小结	**小 结：** 1. 齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念. 2. 计算齐次线性方程组的基础解系和通解. 3. 非齐次线性方程组解的结构. 4. 求解非齐次线性方程组.
复习思考题或作业题	**思考题：** P110　21，23，24。 **作业题：** P110 22（1），（3），29，33
实施情况及分析	1. 通过 2 小时学习，大部分学员掌握齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念；会求齐次线性方程组的基础解系和通解. 2. 求解非齐次线性方程组的运算能力还有待加强。

第（14）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第四章 第 5 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1. 教学目的：了解向量空间，向量空间的基与维数的概念；掌握齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念；并会求齐次线性方程组的基础解系和通解；

2. 教学重点：求解线性方程组的基础解系和通解；

3. 教学难点：求解线性方程组的基础解系和通解.

5. 教学内容： 向量空间；

6. 时间安排: 2 小时；

7. 教学方法：讲授;

8. 教学手段:板演与多媒体相结合.

基本内容	备注

第五节　向量空间

定义 6　设V是n维向量的集合，如果集合V非空，且对任意$a,b\in V$　和任意实数λ，都有$a+b\in V,\lambda a\in V$,那么称集合V为向量空间.

例 1．3 维向量的全体R^3是一个向量空间，由单个零向量组成的集合也是一个向量空间.

例 2．集合$V=\left\{(0,x_2,\cdots,x_n,)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$是一个向量空间.

例 3．集合$V=\left\{(1,x_2,\cdots,x_n,)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$不是向量空间.

定义 7　设有向量空间U及V，若$U\subset V$,就称U是V的子空间.

定义 8　设V为向量空间，如果r个向量$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_r\in V$,且满足

(1)　$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关；

(2)　V中任意向量都可由$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性表示.

那么，向量组$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_r\in V$,就称为$V$的一个基，称$r$为向量空间$V$的维数，并说$V$是$r$维向量空间.

例 1 中R^3的维数为 3 ，因为$\varepsilon_1=\left(1,0,0\right)^T$，$\varepsilon_1=\left(0,1,0\right)^T$，$\varepsilon_1=\left(0,0,1\right)^T$是$R^3$ 的一个基.

例 2 中 V 的维数为$n-1$, 因为

$$\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots\cdots,0,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1,\cdots\cdots,0,0)^T,\cdots\cdots,\quad \varepsilon_n=(0,0,0,\cdots\cdots,0,1)^T$$

是它的一个基.

事实上，r维向量空间中的r个线性无关的向量就可以组成它的

一个基.

如果向量$a_1,a_2,\cdots,a_r$是向量空间V的一个基，则

$$V=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_r a_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R\}$$

例 4. 设 $V=\left\{(a,2a,3a)^T \mid a\in R\right\}$，问$V$是否为向量空间？若是向量空间，试求出它的一个基和它的维数.

解：因为，对任意的$x=(a,2a,3a)^T, y=(b,2b,3b)^T\in V$, 和任意的$\lambda\in R$，都有$x+y\in V,\lambda x\in V$． 所以，$V$是向量空间.

因为向量$(1,2,3)^T\in V$线性无关，且每个$x=(a,2a,3a)^T\in V$，都可由$(1,2,3)^T$表示为，$x=a(1,2,3)^T$，所以向量组$(1,2,3)^T$是V的一个基. V是 1 维向量空间.

回顾和小结	**小 结：** 1.向量空间，向量空间的基与维数的概念. 2.齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念. 3.求解齐次线性方程组的基础解系和通解的方法
复习思考题或作业题	**思考题：**向量组的秩与向量空间的基关系？ **作业题：** P112 36，39，40
实施情况及分析	1.通过 2 小时学习，大部分学员掌握了解向量空间以及向量空间的基与维数的概念； 2.理解了齐次线性方程组解的性质和基础解系的概念； 3.对求齐次线性方程组的基础解系和通解的方法有了进一步的提高。

第（15）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第五章 第 1 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1.教学目的：掌握向量的内积、向量长的概念.掌握正交矩阵和正交变换的定义.了解规范正交向量组的概念，能够运用正交化公式将线性无关的向量组规范正交化；

2.教学重点：用正交化公式将线性无关的向量组规范正交化；

3.教学难点：用正交化公式将线性无关的向量组规范正交化.

1. 教学内容：向量的内积、长度及正交性；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注

第一节　预备知识：向量的内积

定义 1　设有n维向量$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,　$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,令

$$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

称$[x,y]$为向量x与y的内积.

易知，$[x,y]=x^Ty$　.

内积具有下列性质：

1. $[x,y]=[y,x]$；
2. $[\lambda x,y]=[x,\lambda y]$；
3. $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$；
4. $[x,x]\geq 0$，当且仅当时$x=0$　时$[x,x]=0$.

其中x,y,z是为向量，λ为实数.

定义 2　非负实数$\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}$称为$n$维向量$x$的长度（范数）.

向量的长度具有性质：

1. $\|x\|\geq 0$,当且仅当$x=0$时,$\|x\|=0$；
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

长为 1 的向量称为单位向量．若向量$x\neq 0$,则$\frac{1}{\|x\|}x$是单位向量.

例 1. $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ 都是 3 维单位向量.

如果$[x,y]=0$，那么称向量x与y正交.

正交向量组： 一组两两正交的非零向量.

例 2. 试求一个非零向量与向量$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$都正交.

解：设所求的向量为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,那么它应满足$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$

由$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$得$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$，取向量$x=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$即为所求.

定理 1 正交向量组必线性无关.

证明 设向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$是正交向量组，若有一组数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots\cdots+\lambda_ra_r=0.$$

以a_1^T左乘上式两边，得$\lambda_1a_1^Ta_1=0,$因为$a_1\neq0$，所以$a_1^Ta_1=\|a_1\|^2\neq0$，因此必有$\lambda_1=0$.

类似的可证$\lambda_2=\lambda_3=\cdots\cdots=\lambda_r=0.$

于是向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关.

例 3. 向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$线性无关，但不为正交向量组.

规范正交向量组： 由单位向量构成的正交向量组.

向量组$e_1,e_2,\cdots,e_r$为规范正交向量组，当且仅当

$$[e_i,e_j]=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j;\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots\cdots,r.$$

设向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关，则必有规范正交向量组$e_1,e_2,\cdots,e_r$与$a_1,a_2,\cdots,a_r$等价.

正交化：

取 $b_1=a_1$；

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1;$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2;$$

……………

$$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}.$$

单位化：取 $e_1=\dfrac{1}{\|b_1\|}b_1,\ e_2=\dfrac{1}{\|b_2\|}b_2,\cdots\cdots,\ e_r=\dfrac{1}{\|b_r\|}b_r.$

于是，$e_1,e_2,\cdots,e_r$是规范正交向量组，且与$a_1,a_2,\cdots,a_r$等价.

例 4. 把向量组$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$规范正交化.

解： 正交化：取$b_1=a_1$；

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化：取$e_1=\dfrac{1}{\|b_1\|}b_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad e_2=\dfrac{1}{\|b_2\|}b_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

e_1,e_2即为所求.

例 5. 已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，求向量 a_2,a_3 使 a_1,a_2,a_3 为正交向量组.

解：因为向量 a_2,a_3 都与向量 a_1 正交，所以对齐次方程组 $x_1-x_2+x_3=0$，取它的一个基础解系 $b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

再把 b_2,b_3 正交化即为所求 a_2,a_3. 也就是取

$$a_2=b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_3=b_3-\frac{[a_2,b_3]}{[a_2,a_2]}a_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

向量组 a_1,a_2,a_3 是所求正交向量组.

定义 3　设 n 维向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的一个基，如果向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 为规范正交向量组，则称 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是 V 的一个规范正交基.

定义 4　如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^TA=E$，那么称 A 为正交矩阵.

例 6. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 都是正交矩阵.

n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是规范正交向量组.

或者说，n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组构成向量空间 R^n 的一个规范正交基.

设 n 阶矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 A 的列向量组.

A 为正交矩阵，即是

$$E = A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

亦记

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j}\,; \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n.$$

由此可见，A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是规范正交向量组.

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 之间的关系式

$$\begin{cases} x_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n \\ x_2 = p_{21} y_1 + p_{22} y_2 + \cdots + p_{2n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_{n1} y_1 + p_{n2} y_2 + \cdots + p_{nn} y_n \end{cases} \qquad (*)$$

叫做从变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换.

线性变换的系数构成矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$，于是线性变换（*）就可以记为

$$x = Py \quad 其中 x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

定义 5 若 P 为正交矩阵，则线性变换 $x = Py$ 称为正交变换.

正交变换具有下列性质：

(1) 正交变换保持两向量内积不变;

(2) 正交变换保持向量的长度不变(保距性)；

(3) 正交变换保持向量的夹角不变(保角性)；

(4) 正交变换把标准正交基仍变为标准正交基.

例 7. $\begin{cases} x_1 = y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha \\ x_2 = y_1\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \end{cases}$ 都为正交变换.

若线性变换 $x = Py$ 为正交变换，a,b 为任意两个向量. 那么 $[Pa, Pb] = [a, b]$.这是因为 $[Pa, Pb] = (Pa)^T (Pb) = a^T P^T Pb = a^T b = [a, b]$,特别的，$\|Pa\| = \|a\|$.

回顾和小结	**小 结：** 1.向量的内积、向量长度、夹角的概念. 2.正交矩阵和正交变换的定义. 3.规范正交向量组的概念，施米特正交化公式 4.线性无关的向量组的规范正交化.
复习思考题或作业题	**思考题：**向量的正交、线性无关之间关系？ **作业题：** P138 1（2），2，3
实施情况及分析	1.通过 2 小时学习，大部分学员掌握了向量的内积、向量长度、夹角的概念； 2.掌握了正交矩阵和正交变换的定义. 3.了解规范正交向量组的概念，能够运用施米特正交化公式将线性无关的向量组规范正交化

第（16）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第五章 第 2、3 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1. 教学目的：掌握特征值与特征向量的概念，计算特征值与特征向量的方法；

   掌握相似矩阵的概念、主要性质及矩阵与对角矩阵相似的条件；

2. 教学重点: 计算特征值与特征向量的方法,矩阵与对角矩阵相似的条件；

3. 教学难点: 计算特征值与特征向量的方法, 矩阵与对角矩阵相似的条件.

1. 教学内容: 方阵的特征值与特征向量，相似矩阵

2. 时间安排: 2 小时；

3. 教学方法：讲授;

4. 教学手段:板演与多媒体相结合.

授课内容

<table>
<tr><th>基本内容</th><th>备注</th></tr>
<tr><td>

第二节　方阵的特征值与特征向量

定义 6　设 A 是 n 阶矩阵，如果有 λ_0 和 n 维非零列向量 p 使得

$$Ap = \lambda_0 p \tag{1}$$

那么数 λ_0 称为方阵 A 的特征值，非零向量 p 称为 A 的对于特征值 λ_0 的特征向量.

行列式 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$ 是 λ 的 n 次多项式，称为方阵 A 的特征多项式.

方程 $|A-\lambda E| = 0$ 称为 n 阶矩阵 A 的特征方程.

(1) 式也可写成　$(A-\lambda_0 E)p = 0$　(2)

于是，矩阵 A 的特征值 λ_0 是它的特征方程 $|A-\lambda E|$ 的根，λ_0 的特征向量 p 是齐次线性方程组 $(A-\lambda_0 E)x = 0$ 的非零解.

求 n 阶方阵 A 的特征值与特征向量的方法：

1　求出矩阵的 A 特征多项式，即计算行列式 $|A-\lambda E|$.

2　特征方程 $|A-\lambda E| = 0$ 的解（根）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是 A 的特征值.

3 解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x = 0$，它的非零解都是特征值 λ_i 的特征向量.

</td><td></td></tr>
</table>

例 1.　　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解:　　A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$ 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, 所以特征值 $\lambda_i=2$ 的全部特征向量为 kp_1，其中 k 为任意非零数.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, 所以特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 kp_2, 其中 k 是任意非零数.

例 2.　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ -2 & 5-\lambda & -2\\ -2 & 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(1-\lambda)^2$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=3$时，解方程组$(A-3E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 4 & -4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,所以特征值$\lambda_1=3$的全部特征向量为$kp_1$，其中$k$为任意非零数.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程组$(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,所以特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$kp_2+lp_3$，其中$k$，$l$不同时为零.

例 3. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$的特征值与特征向量.

解： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$

得特征值$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时, 解方程$(A+E)x=0$，得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以对应于

$\lambda_1=-1$全部特征向量为$kp_1\left(k\neq 0\right)$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程$\left(A-2E\right)x=0$，

得基础解系$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$，所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为

kp_2+lp_3，其中k，l不同时为零.

例 4.　如果矩阵A满足$A^2=A$,则称A是幂等矩阵. 试证幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1.

证明 设$A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha},(\vec{\alpha}\neq\vec{0})$两边左乘矩阵$A$，得

$$A\vec{\alpha}=\lambda A\vec{\alpha}\Rightarrow A\vec{\alpha}=\lambda\lambda\vec{\alpha}\Rightarrow\lambda\vec{\alpha}=\lambda^2\vec{\alpha}.$$

由此可得$(\lambda-\lambda^2)\vec{\alpha}=\vec{0}.$

因为$\vec{\alpha}\neq\vec{0},$所以有$\lambda-\lambda^2=0,$得$\lambda=0$　或$\lambda=1.$

※由证明过程可得结论，若λ是A的特征值，则λ^2是A^2的特征值. 进而λ^k是A^k的特征值

定理 2 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是方阵$A$的特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_n$依次是与之对应的特征向量, 如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$各不相等，那么$p_1,p_2,\cdots,p_n$线性无关.

证明　对特征值的个数m用数学归纳法.

由于特征向量是非零向量，所以，$m-1$时定理成立.

假设$m-1$个不同的特征值的特征向量是线性无关的，令$p_1,p_2,\cdots,p_m$依次为m个不等的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$对应的特征向量.

下面证明$p_1,p_2,\cdots,p_m$线性无关.

设有一组数$x_1,x_2,\cdots,x_m$使得

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0\qquad(1)$$

成立. 以λ_m乘等式（1）两端，得

$$x_1\lambda_m p_1+\cdots\cdots+x_{m-1}\lambda_m p_{m-1}+x_m\lambda_m p_m=0. \qquad (2)$$

以矩阵A左乘式 (1)两端, 得

$$x_1\lambda_1 p_1+\cdots\cdots+x_{m-1}\lambda_{m-1} p_{m-1}+x_m\lambda_m p_m=0. \qquad (3)$$

（3）式减（2）式得

$$x_1(\lambda_1-\lambda_m)p_1+\cdots\cdots+x_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)p_{m-1}=0.$$

根据归纳法假设，$p_1,p_2,\cdots,p_{m-1}$线性无关，于是$x_1(\lambda_1-\lambda_m)=\cdots=x_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)=0$.

但$\lambda_1-\lambda_m\neq 0,\cdots\cdots,\lambda_{m-1}-\lambda_m\neq 0$, 所以，$x_1=0,\cdots,x_{m-1}=0$. 这时（1）式变成，$x_m p_m=0$. 因为$p_m\neq 0$， 所以只有$x_m=0$.

这就证明了$p_1,p_2,\cdots,p_m$线性无关.

归纳法完成，定理得证.

例 5. 设λ_1,λ_2是A的特征值，p_1,p_2依次是与之对应的特征向量，若$\lambda_1\neq\lambda_2$，那么向量组p_1,p_2线性无关.

证明　设有一组数x_1,x_2使得

$$x_1p_1+x_2p_2=0 \qquad (1)$$

成立. 以λ_2乘等式（1）两端，得

$$x_1\lambda_2 p_1+x_2\lambda_2 p_2=0. \qquad (2)$$

以矩阵A左乘式 (1) 两端, 得

$$x_1\lambda_1 p_1+x_2\lambda_2 p_2=0. \qquad (3)$$

（3）式减（2）式得$x_1(\lambda_2-\lambda_1)p_1=0.$

因为$\lambda_2-\lambda_1\neq 0, p_1\neq 0$，所以$x_1=0$. 这样（1）式变成，$x_2p_2=0$. 因

为 $p_2 \neq 0$，所以只有 $x_2 = 0$.

即证明了 p_1, p_2 线性无关.

例 6. 设 λ 是方阵 A 的特征值，μ 为任意常数，试证 $\mu\lambda$ 是 μA 的特征值.

证明 因为 μ 是 A 的特征值， 所以有向量 $p \neq 0$ 使， $Ap = \lambda p.$
于是，$(\mu A)p = \mu\lambda p$. 所以 $\mu\lambda$ 是 μA 的特征值.

第三节 相似矩阵

定义 7 设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，则称矩阵 A 与 B 相似，可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.

相似矩阵有相同的行列式与相同的秩.

定理 3 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，从而 A 与 B 的特征值也相同.

证明 因为 A 与 B 相似，所以有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，故

$$|B - \lambda E| = |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P|$$

$$= |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E|.$$

证毕.

推论 若 n 阶矩阵 A 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 即为 A 的 n 个特征值.

证明 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 既是对角矩阵 Λ 的 n 特征值，由定理 3 知，

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即为$A$的$n$个特征值.

定理 4　n阶矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是：A有n个线性无关的特征向量.

推论　如果n阶矩阵A的特征值互不相等，则A与对角矩阵相似.

定理 4 的证明　如果可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵，也就是$AP=P\Lambda$.

若记矩阵$P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$，其中$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$是$P$的列向量组，就有

$$A(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即为$(Ap_1,\ Ap_2,\ \cdots,\ Ap_n)=(\lambda_1 p_1,\ \lambda_2 p_2,\ \cdots,\ \lambda_n p_n)$，于是有$Ap_i=\lambda_i p_i$，$i=1,2,\cdots n$.

再由P是可逆矩阵便可知，$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$就是A的n个线性无关的特征向量.

反之，如果n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$，于是，应有数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使$Ap_i=\lambda_i p_i$，$i=1,2,\cdots n$.
以向量组$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$构成矩阵$P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$，则$P$为可逆矩阵，且$AP=P\Lambda$，其中$\Lambda$是以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$构成的对角矩阵，也就是$P^{-1}AP=\Lambda$，即$A$与对角矩阵相似.

§2 例 1 中的 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$只有 2 个线性无关的特征向量，所以它不可能与对角矩阵相似.

§2 例 2 中的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}$， $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,是 A 的特征值 3 的线性无关的特征向量， $p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,是 A 的特征值 1 的线性无关的特征向量.

于是， 3 阶矩阵 A 恰有 3 个线性无关的特征向量 p_1,p_2,p_3，所以它能与对角矩阵相似.

令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ ，则 P 为可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 1. 判断下列矩阵是否与对角矩阵相似，若是，求出相似变换矩阵和对角矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

解： A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&-2\\2&-\lambda&-2\\2&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\-2&\lambda&2\\0&\lambda-1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\-2&\lambda&2\\0&1&-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=0$ 时，解方程组 $\left(A-0E\right)x=0$. 由

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&-1/2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

于是，3 阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，所以它能与对角矩阵相似.

令 $P=\begin{pmatrix}1&1/2&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则可逆矩阵 P 为所求相似变换矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 2．设 2 阶矩阵 A 的特征值为 1, −5, 与特征值对应的特征向量分别为 $(1,\ 1)^T,(2,\ -1)^T$, 求 A.

解：因为 2 阶矩阵 A 有 2 个互异的特征值，据定理 4 的推论，A 能与对角矩阵相似.

取 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$，应有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-5\end{pmatrix}$，所以

$$A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-5\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&2/3\\1/3&-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\2&-1\end{pmatrix}$$

例 3．社会调查表明，某地劳动力从业转移情况是：在从农人员中每年有 3/4 改为从事非农工作，在非农从业人员中每年有 1/20 改

为从农工作．到 2000 年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的 1/5 和 4/5，试预测到 2005 年底该地劳动力从业情况以及经过多年之后该地劳动力从业情况的发展趋势．

解：到 2001 年底该地从农工作和从事非农工作人员占全部劳动力的百分比分别为

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\times\frac{4}{5} \text{和} \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{19}{20}\times\frac{4}{5}$$

如果引入 2 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$，其中 $a_{12}=1/20$，表示每年非农从业人员中有 1/20 改为从农工作． $a_{21}=3/4$ 表示每年从农人员中有 3/4 改为从事非农工作．于是有 $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/20\\ 3/4 & 19/20\end{pmatrix}$

再引入 2 维列向量,其分量依次为到某年底从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比．如向量 $x=\begin{pmatrix}1/5\\ 4/5\end{pmatrix}$ 表示到 2000 年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的 1/5 和 4/5．那么，2001 年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比就可由下述运算得出

$$Ax=\begin{pmatrix}1/4 & 1/20\\ 3/4 & 19/20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5\\ 4/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\times\frac{4}{5}\\ \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{19}{20}\times\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/100\\ 91/100\end{pmatrix}$$

于是，到 2005 年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比应为 A^5x, k 年后该地劳动力的从业情况可由计算 A^kx 而得.

矩阵 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{20}\\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20}-\lambda\end{vmatrix}=(5\lambda-1)(\lambda-1)$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=1/5$，$\lambda_1=1$. 据定理 4 的推论，A 能与对角矩阵相似.

求特征值 $\lambda_1=1/5$ 对应的特征向量，得 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

求特征值 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量，得 $\begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix}$.

取矩阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 15\end{pmatrix}$，则 P 为可逆矩阵，且使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1/5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

因为 $P^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$A^5x=P\begin{pmatrix}1/5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^5P^{-1}x=P\begin{pmatrix}(1/5)^5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}x$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1/5)^5 & \\ & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1/5\\4/5\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{11}{5^6}\\15-\frac{11}{5^6}\end{pmatrix}$$

类似的，第 k 年底该地劳动力的从业情况为

$$A^kx=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1/5)^k & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5\\4/5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{15}{5^k} & 1-\frac{1}{5^k}\\15\left(1-\frac{1}{5^k}\right) & 15+\frac{15}{5^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{11}{5^{k+1}}\\15-\frac{11}{5^{k+1}}\end{pmatrix}$$

按此规律发展，多年之后该地从农工作和从事非农工作人员占全部劳动力的百分比趋于

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}6/100\\94/100\end{pmatrix}$$

即 ，多年之后该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的

6/100 和 94/100.

例 4. 如果$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$那么$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|=(1-\lambda)^2$

于是A与B的特征多项式 相同，但A与B 不相似.

特征多项式相同的矩阵未必相似.

例 5. 已知$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$相似，求$x, y$.

解：因为相似矩阵有相同的特征值，故A, B有相同的特征值 2，y，−1.

根据特征方程根与系数的关系，有$2+0+x=2+y+(-1)$，$|A|=-2y$. 而$|A|=-2$，故$x=0, y=1$.

回顾和小结	**小 结：** 1. 惯性定理； 2. 正（负）定二次型与正（负）定矩阵的概念； 3.实二次型、实对称矩阵是否为正定的判断。
复习思考题或作业题	**思考题：**方阵可对角化的条件？ P138 14 **作业题：** P138 7，8，10，12，15

实施情况及分析	1.通过 2 小时学习，大部分学员掌握了特征值与特征向量的概念. 2.掌握了计算特征值与特征向量的方法. 3.理解相似矩阵的概念和主要性质. 4.对矩阵与对角矩阵相似的条件的掌握还有待加强.

第（17）次课　　授课时间（　　）

教学章节	第五章第 4 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1.教学目的：了解对称矩阵的特征值与特征向量的性质，正交相似变换矩阵将对称矩阵化为对角矩阵； 2.教学重点：正交相似变换矩阵将对称矩阵化为对角矩阵； 3.教学难点：正交相似变换矩阵将对称矩阵化为对角矩阵			

1. 教学内容：对称矩阵的对角化

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

授课内容

基本内容	备注

第四节 对称矩阵的相似矩阵

定理 5　实对称矩阵的特征值为实数.

证设λ是实对称矩阵A的特征值x为λ对应的特征向量. 即 $Ax=\lambda x$.　于是有

$$\overline{x^T}Ax=\overline{x^T}(Ax)=\lambda\overline{x^T}x,\quad 及\quad \overline{x^T}Ax=(\overline{x^T}A^T)x=\overline{(Ax)}^Tx=\overline{\lambda}\,\overline{x^T}x$$

两式相减，得$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{x^T}x=0$，因为 $p\neq 0$，所以 $\overline{x^T}x\neq 0$，

故$\lambda=\overline{\lambda}$，即$\lambda$为实数.

定理 6 设λ_1,λ_2是实对称矩阵 A 的两个特征值，p_1,p_2 依次是它们对应的特征向量. 若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则 p_1与 p_2正交.

证明　由已知有

$$Ap_1=\lambda_1 p_1 \tag{1}$$

$$Ap_2=\lambda_2 p_2 \tag{2}$$

以p_1^T 左乘（2）式的两端得 $p_1^T(Ap_2)=\lambda_2 p_1^T p_2$

因为A是实对称矩阵，所以

$$p_1^T(Ap_2)=(Ap_1)^Tp_2=(\lambda_1 p_1)^Tp_2=\lambda_1 p_1^Tp_2$$

于是$(\lambda_1-\lambda_2)p_1^Tp_2=0.$

因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，故$p_1^Tp_2=0$，即 p_1与 p_2 正交.

定理 7 设A为n阶对称矩阵，则必有正交矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，其中Λ是以A的n个特征值为对角元素的对角矩阵.

证明 设A的互不相等的特征值为 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m，它们的重数依次为 r_1，r_2，$\cdots$，r_m，于是，$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$. 根据定理 5 及定理 7 知，对应特征值λ_i 恰有r_i个线性无关的实特征向量，把它们正交单位化，即得 r_i 个单位正交的特征向量，$i=1,2,\cdots,m$. 由

$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$. 知这样的特征向量恰有n个. 又实对称矩阵不等的特征值对应的特征向量正交（根据定理 6），故这n个特征向量构成规范正交向量组. 以它们为列构成矩阵P, 则为P正交矩阵，并有$P^{-1}AP=\Lambda$ 其中对角矩阵Λ 的对角元素含r_1 个$\lambda_1,\cdots\cdots,r_m$个$\lambda_m$, 恰是$A$的$n$个特征值.

推论　设A为n阶对称矩阵，λ是A的特征方程的 r 重根，则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R(A-\lambda E)=n-r$，从而特征值λ 恰有r个线性无关的特征向量.

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵.

解： A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda),$$

故的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=5$.

当$\lambda_1=1$时，由$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

解得基础解系 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=3$时，由$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

解得基础解系 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

当$\lambda_3 = 5$时，由$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解得基础解系 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

于是得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

且使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

例2.设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \Lambda$ 为对角矩阵.

解：A 的特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2,$$

故得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$.

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$时,解齐次线性方程组（ $\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0$,

解得基础解系 $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,将其规范正交化.

正交化：取 $q_1=b_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$$q_2=b_2-\frac{[b_1,b_2]}{[b_1,b_1]}b_1=b_2-\frac{b_1^Tb_2}{b_1^Tb_1}b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

再单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=3$时，解齐次线性方程组（$A-3E)x=0$,

解得基础解系 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

于是得正交矩阵 . $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)==\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

且使得 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

例 3．设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$,求 A^n.

回顾和小结	**小 结：** 1. 二次型的概念； 2.用正交变换化二次型成标准形的方法及步骤； 3.用配方法化二次型成标准形的方法
复习思考题或作业题	**思考题：** 1. 二次型的标准型唯一吗？标准型与特征值之间有何关系？ **2**．化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为标准形并写出所做的可逆变换 **作业题：** 习题五第 27（1，2）、30(1,3)
实施情况及分析	1.通过学习学员解对称矩阵的特征值与特征向量的性质，正交相似变换矩阵 将对称矩阵化为对角矩阵； 2.对正交相似变换矩阵将对称矩阵化为对角矩阵等方面有待加强.

第（18）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第五章第 5、6 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1．教学目的：掌握二次型、二次型的标准形、合同等概念,会用正交变换将二次型化为标准形；掌握配方法化二次型成标准形的方法；

2. 教学重点：用正交变换化二次型成标准型、配方法化二次型成标准形；

3. 教学难点：用正交变换化二次型成标准型、配方法化二次型成标准形。

1. 教学内容：二次型及其标准形、用配方法化二次型成标准形

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

基本内容	备注

第五节 二次型及其标准形

变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots\cdots\qquad+a_{nn}x_n^2$$

称为n元二次型，简称为二次型.

$a_{ij}\in\mathbf{R}$：称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为实二次型（本章只讨论实二次型）

$a_{ij}\in\mathbf{C}$：称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为复二次型.

一、二次型的概念

定义 1　含有 n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (1)$$

称为二次型.

1．矩阵表示：若取$a_{ji}=a_{ij}$，则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$于是(1)式可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (2)$$

对二次型(1)，记$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

则二次型(1)又表示为　$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\ x^TAx$

其中 A 为对称矩阵，叫做二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵，也把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$叫做对称矩阵A的二次型. 对称矩阵A的秩，叫做二次型

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =\ x^T A x$的秩.

2．标准形：二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$经过可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (3)$$

即用(3) 代入（1）, 还是变成二次型. 那么新二次型的矩阵与原二次型的矩阵 A 的关系是什么？

找可逆线性变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{11} & \boldsymbol{c}_{12} & \cdots & \boldsymbol{c}_{1n} \\ \boldsymbol{c}_{21} & \boldsymbol{c}_{22} & \cdots & \boldsymbol{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{c}_{n1} & \boldsymbol{c}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{c}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix} \qquad (\det \boldsymbol{C} \neq 0)$$

使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{y}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{k}_n\boldsymbol{y}_n^2$.

介绍二次型的规范型。

3．合同矩阵

可逆线性变换（3), 记作$x = Cy$, 其中矩阵$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$. 把可逆的线性变换$x = Cy$ 代入二次型$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，得二次型

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

就是说, 若原二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}$, 那么新二次型的矩阵为$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ，其中$\boldsymbol{C}$是所用可逆线性变换的矩阵.

定义 2 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是 n 阶矩阵, 若有可逆矩阵 C, 使得$B = C^T AC$, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$和 B 合同。

结论: 设有可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$B = C^T AC$, 如果$\boldsymbol{A}$为对称矩阵, 则$\boldsymbol{B}$也为对称矩阵, 且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$.

证明　因为$\boldsymbol{A}$是对称矩阵，即$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$, 所以

$$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{C})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

即$\boldsymbol{B}$为对称矩阵.

因为$B=C^TAC$, 所以$\boldsymbol{R(B)\le R(AC)\le R(A)}$.

因为$\boldsymbol{A=(C^T)^{-1}BC^{-1}}$,

所以$\boldsymbol{R(A)\le R(BC^{-1})\le R(B)}$, 故得$\boldsymbol{R(A)=R(B)}$.

二、化二次型为标准形

主要问题：求可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \tag{3}$$

将二次型（1）化为只含平方项, 即用(3）代入（1）, 能使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots\cdots+k_ny_n^2 \tag{4}$$

称（4）为二次型的标准形.（二次型的标准型不唯一）

也就是说, 已知对称矩阵A, 求一个可逆矩阵C 使$C^TAC=\Lambda$为对角矩阵.

定理 1　任意二次型$\boldsymbol{f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})}$, 总有正交变换$\boldsymbol{x=Py}$,

使　$\boldsymbol{f}$ f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$ 的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值.

例 1. 写出二次型$f=-x_1^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_3^2$的矩阵.

解：　二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

例 2. 求一个正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，把二次型

$$\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3-2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_4-2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_4+2\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{x}_4$$

化为标准形.

解：$\boldsymbol{f}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\boldsymbol{\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)}$

求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$：

$$\boldsymbol{Q}=\left(\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}\right),\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}$$

正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$：标准形$\boldsymbol{f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2}$.

第六节　用配方法化二次型成标准形

用正交变换化二次型为标准形，其特点是保. 持几何形状不变. 问题：有没有其它方法，也可以把二次型化为标准形？

问题的回答是肯定的。下面介绍一种行之有效的方法——拉格朗日配方法.

例 1.　化二次型$f=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$为标准形，并求所用的变换矩阵.

解：$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{x}_1^2-4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3)+\boldsymbol{x}_2^2+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3-2\boldsymbol{x}_3^2$

$=(\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)^2-4\boldsymbol{x}_2^2-\boldsymbol{x}_3^2+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3)+\boldsymbol{x}_2^2+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3-2\boldsymbol{x}_3^2$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-3x_2^2+6x_2x_3-3x_3^2$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-3(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-2x_2+x_3 \\ y_2=\quad\quad x_2-x_3 \\ y_3=\quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} x_1=y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=\quad\quad y_2+y_3 \\ x_3=\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$

就把 f 化成标准形 $f=y_1^2-3y_2^2$，

所用线性变换矩阵为 $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例 2. 化二次型 $f=x_1x_2+x_1x_3+3x_2x_3$

解：令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$，代入，再配方可得

$$f=y_1^2+3y_1y_3-y_2^2-y_2y_3=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-\frac{9}{4}y_3^2-y_2^2-y_2y_3$$

$$=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-((y_2+\frac{1}{2}y_3)^2-\frac{1}{4}y_3^2)-\frac{9}{4}y_3^2$$

$$=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-(y_2+\frac{1}{2}y_3)^2-2y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+\quad\quad\frac{3}{2}y_3 \\ z_2=\quad\quad y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ z_3=\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1\quad\quad-\frac{3}{2}z_3 \\ y_2=\quad\quad z_2-\frac{1}{2}z_3 \\ y_3=\quad\quad\quad\quad z_3 \end{cases}$

就有 $f=z_1^2-z_2^2-2z_3^2$.

所用变换矩阵为 $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

回顾和小结	**小 结：** 1. 二次型的概念； 2.用正交变换化二次型成标准形的方法及步骤； 3.用配方法化二次型成标准形的方法
复习思考题或作业题	**思考题：** 1. 二次型的标准型唯一吗？标准型与特征值之间有何关系？ **2**．化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为标准形并写出所做的可逆变换 **作业题：** 习题五第 27（1，2）、30(1,3)
实施情况及分析	通过学习学员了掌握二次型、二次型的标准形、合同等概念,会用正交变换和配方的方法将二次型化为标准形.化二次型成标准形的方法，尚需加强训练.

第（19）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	第五章 第7节	学时	2学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》;3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		

1.教学目的：掌握正（负）定二次型与正（负）定矩阵的概念. 能够判断实二次型、实对称矩阵是否为正定的；

2.教学重点：判断实二次型、实对称矩阵是否为正定的；

3.教学难点：判断实二次型、实对称矩阵是否为正定的

1. 教学内容：正定二次型.

2. 时间安排：2学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示.

授课内容

基本内容	备注
第七节　正定二次型 定理 1 设实二次型 $f = x^T Ax$，它的秩为 r，有两个可逆变换 $x = Cy$ 及 $x = Pz$ 使 $$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad (k_r \neq 0),$$ 和 $$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_r \neq 0),$$ 则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等. 注：这个定理称为惯性定理，不证明。 定义 1 设有二次型 $f(x) = x^T Ax$，如果对任何 $x \neq 0$，都有 $f(x) > 0$（显然 $f(0) = 0$），则称 f 为正定二次型，并称对称阵 A 是正定的；如果对任何 $x \neq 0$，都有 $f(x) < 0$，则称 f 为负定二次型，并称对称阵 A 是负定的 定理 2　n 元实二次型 $f(x) = x^T Ax$，为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正. 证明　设可逆变换 $x = Cy$ 使 $f(x) = f(Cy) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$ 先证充分性. 设 $k_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$．任给 $x \neq 0$，因为 C 是可逆矩阵，所以 $y = C^{-1}x \neq 0$，故 $f(x) = f(Cy) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 > 0$，即二次型为正定的. 再证必要性.	

用反证法．假设有$\boldsymbol{k}_s \le 0$，则当 $y = e_s$时，$f(Ce_s) = k_s \le 0$，其中e_s是第s个分量为1其余分量都为 0 的n维向量．显然$Ce_s \ne 0$，这与f为正定相矛盾．因而$k_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$．

推 论　对称矩阵A为正定的充分必要条件是：A的特征值全为正．

定理 3　对称矩阵A为正定矩阵的充分必要条件是：A的各阶主子式都为正．即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

对称矩阵A为负定矩阵的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0.(r = 1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为霍尔维茨定理。

注：不证明．

例 1. 判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$是否正定．

例 2. 判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$是否正定．

（$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$. 正定）

例 3. 判别二次型$f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$的正定性．

解：f的矩阵为$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

各阶顺序主子式：

$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,\quad |A|=-80<0,$$

故 f 是负定二次型.

回顾和小结	**小 结：** 3. 惯性定理； 4. 正（负）定二次型与正（负）定矩阵的概念； 3. 实二次型、实对称矩阵是否为正定的判断。
复习思考题或作业题	**思考题：**设A,B分别为n阶正定矩阵，是判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵。 **作业题：** 习题五第 32(1,3)
实施情况及分析	1. 通过学习学员知道惯性定理的内容，掌握正（负）定二次型与正（负）定矩阵的概念. 能够判断实二次型、实对称矩阵是否为正定的。 2. 对实二次型、实对称矩阵是否为正定的判断尚需进一步加强。

第（20）次课　　授课时间（　　　）

教学章节	全书复习	学时	2 学时
教材 和参考书	1.《线性代数》(第四版)同济大学编；2. 同济大学 胡一鸣编《线性代数辅导及习题精解》；3.孙建东等编《线性代数知识点与典型例题解析》。		
1.教学目的：对所学过的知识进行复习,和对常用例题进行讲解； 2.教学重点：例题讲解； 3.教学难点：综合性例题			
1.教学内容：全书复习； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示。			

基本内容	备注
知识点回顾 第一部分：基本要求（计算方面） 1． 四阶行列式的计算； 2． N 阶特殊行列式的计算（如有行和、列和相等）； 3． 矩阵的运算（包括加、减、数乘、乘法、转置、逆等的混合运算）； 4． 求矩阵的秩、逆（两种方法）； 5． 含参数的线性方程组解的情况的讨论； 6． 齐次、非齐次线性方程组的求解（包括唯一、无穷多解）； 7． 讨论一个向量能否用和向量组线性表示； 8． 讨论或证明向量组的相关性； 9． 求向量组的极大无关组，并将多余向量用极大无关组线性表示； 10． 将无关组正交化、单位化； 11． 求方阵的特征值和特征向量； 12． 讨论方阵能否对角化，如能，要能写出相似变换的矩阵及对角阵； 13． 通过正交相似变换（正交矩阵）将对称矩阵对角化； 14． 写出二次型的矩阵，并将二次型标准化，写出变换矩阵； 15． 判定二次型或对称矩阵的正定性。	

第二部分：基本知识

一、行列式

1．行列式的定义

用个元素组成的记号称为n阶行列式。

（1）它表示所有可能的取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和；

（2）展开式共有项，其中符号正负各半；

2．行列式的计算

1． 一阶行列式，二、三阶行列式有对角线法则；

2． 阶（）行列式的计算：降阶法

定理：阶行列式的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积的和。

方法：选取比较简单的一行（列），保保留一个非零元素，其余元素化为0，利用定理展开降阶。

3． 特特情况

（1） 上、下三角形行列式、对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积；

（2） 行列式值为0的几种情况：

Ⅰ 行列式某行（列）元素全为0；

Ⅱ 行列式某行（列）的对应元素相同；

Ⅲ 行列式某行（列）的元素对应成比例；

Ⅳ 奇数阶的反对称行列式。

二．矩阵

1．矩阵的基本概念（表示符号、一些特殊矩阵－－如单位矩阵、对角、对称矩阵等）；

2．矩阵的运算

（1）加减、数乘、乘法运算的条件、结果；

（2）关于乘法的几个结论：

①矩阵乘法一般不满足交换律（若，称是可交换矩阵）；

②矩阵乘法一般不满足消去律、零因式不存在；③若为同阶方阵，则；

3．矩阵的秩

（1）定义　非零子式的最大阶数称为矩阵的秩；

（2）秩的求法　一般不用定义求，而用下面结论：

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；阶梯形矩阵的秩等于非零行的个数（每行的第一个非零元所在列，从此元开始往下全为 0 的矩阵称为行阶梯阵）。

求秩：利用初等变换将矩阵化为阶梯阵得秩。

4．逆矩阵

（1）定义：为 n 阶方阵，若，称可逆，是的逆矩阵（满足半边也成立）；

（2）性质：　，；

（3）可逆的条件：

①　；　②；　③

（4）逆的求解

①伴随矩阵法　；

②初等变换法

5．用逆矩阵求解矩阵方程：

①，则；

②，则；

③，则

三、线性方程组

1．线性方程组解的判定

定理：

2．齐次线性方程组

（1）解的情况：

，（或系数行列式）只有零解；

，（或系数行列式）有无穷多组非零解。

（2）解的结构：

。

（3）求解的方法和步骤：

①将增广矩阵通过行初等变换化为最简阶梯阵；

②写出对应同解方程组；

③移项，利用自由未知数表示所有未知数；

④表示出基础解系；

⑤写出通解。

3．非齐次线性方程组 （1）解的情况： 利用判定定理。 （2）解的结构： 。 （3）无穷多组解的求解方法和步骤： 与齐次线性方程组相同。 （4）唯一解的解法： 有克莱姆法则、逆矩阵法、消元法（初等变换法）。 四、向量组 1．维向量的定义 注：向量实际上就是特殊的矩阵（行矩阵和列矩阵）。 2．向量的运算： （1）加减、数乘运算（与矩阵运算相同）； （2）向量内积 ； （3）向量长度 （4）向量单位化 ； （5）向量组的正交化（施密特方法） 设线性无关，则 ， ，	

，………。 3．线性组合 （1）定义　若，则称是向量组的一个线性组合，或称可以用向量组的一个线性表示。 （2）判别方法　将向量组合成矩阵，记 ， 若　，则可以用向量组的一个线性表示； 若　，则不可以用向量组的一个线性表示。 （3）求线性表示表达式的方法： 将矩阵施行行初等变换化为最简阶梯阵，则最后一列元素就是表示的系数。 4．向量组的线性相关性 （1）线性相关与线性无关的定义 设， 若不全为 0，称线性相关； 若全为 0，称线性无关。 （2）判别方法： ①，线性相关； ，线性无关。 ②若有个维向量，可用行列式判别： ，线性相关（无关） 5．极大无关组与向量组的秩	

（1）定义　极大无关组所含向量个数称为向量组的秩

（2）求法　设)，将化为阶梯阵，则的秩即为向量组的秩，而每行的第一个非零元所在列的向量就构成了极大无关组。

五、矩阵的特征值和特征向量

1．定义　对方阵，若存在非零向量和数使

，则称是矩阵的特征值，向量称为矩阵的对应于特征值的特征向量。

2．特征值和特征向量的求解：

求出特征方程的根即为特征值，将特征值代入对应齐次线性方程组中求出方程组的所有非零解即为特征向量。

3．重要结论：

（1）可逆的充要条件是的特征值不等于 0；

（2）与的转置矩阵有有相同的特征值；

（3）不同特征值对应的特征向量线性无关。

六、矩阵的相似

1．定义　对同阶方阵、，若存在可逆矩阵，使，则称与相似。

2．求与对角矩阵相似的方法与步骤（求和）：

① 求出所有特征值；

② 求出所有特征向量；

③ 若所得线性无关特征向量个数与矩阵阶数相同，则可对角化（否则不能对角化），将这个线性无关特征向量组成矩阵即为相似变换的矩阵，依次将对应特征值构成对角阵即为。

3．求通过正交变换与实对称矩阵相似的对角阵：

方法与步骤和一般矩阵相同，只是第三步要将所得特征向量正交化且单位化。

七、二次型

1．定义　元二次多项式称为二次型，若，则称为二交型的标准型。

2．二次型标准化：

配方法和正交变换法。正交变换法步骤与上面对角化完全相同，这是由于对正交矩阵，，即正交变换既是相似变换又是合同变换。

3．二次型或对称矩阵的正定性：

（1）定义（略）；

（2）正定的充要条件：

①为正定的充要条件是的所有特征值都大于 0；

②为正定的充要条件是的所有顺序主子式都大于 0；

例题讲解

例 1　计算.

解 ：

例 2　计算　.

解法 1 ：　　　　“”

解法 2：　加边法

例 3　设 满足，求.

解：并项：

左乘：

计算：

例 4　求解，　，

解：

（1）：同解方程组为

基础解系 ， 特解

通解为　（为任意常数）

（2）：同解方程组为

基础解系 ， ，

特解

通解为　（为任意常数）

例 5　向量组：，，，

求向量组的一个最大无关组。

解：　对矩阵 进行初等行变换可得

(1)：

的 1,2,3,4 列线性无关的 1,2,3,4 列线性无关

故是的一个最大无关组；

(2)：

的 1,2,3 列线性无关的 1,2,3 列线性无关

故是的一个最大无关组.

例 6

用正交变换化为标准形.

解：的矩阵

的特征多项式

的两个正交的特征向量，

的特征向量

正交矩阵

正交变换：标准形

例 7，秩.

(1) 求；

(2) 用正交变换化为标准形.

解：(1) 的矩阵　　（显见）

(2)

的特征向量依次为

，，　　（两两正交）

正交矩阵

正交变换

标准形

例 8　设的一个特征向量为，求数及的

全体特征值与特征向量.

解 ：

：

由此可得：对应特征值只有 1 个线性无关的特征向量，而特征

方程的基础解系为，全体特征向量为。

例 9　设方阵的特征值，对应的特征向量分别为，证明：

(1) 不是的特征向量；

(2) ，线性无关.

证明　(1) 反证法．若，则

线性无关　矛盾!

故不是的特征向量.

(2) 设数组使得，则

线性无关

即. 故,线性无关.

回顾和小结	**小结：** 1．知识点回顾 2．例题讲解;
复习思考题或作业题	**作业题：** 对 2007，2008 年考试卷子 以及复习例题汇总复习
实施情况及分析	1.通过学习使学员掌握线性代数的常用计算方法和步骤； 2.学员的综合性掌握不够，有待加强锻炼