教 案

（2020-2021 学年　第 1 学期）

课程名称：　　　　　　线性代数

任课教师：　　　　　　王嫣

所在院系：　　　　　　公共教学部

教学教案设计（续页）

第一 章　行列式

§1.1　n 阶行列式定义

教学目的：使学生了解和掌握 n 级排列、逆序逆序数奇排列偶排列 n 阶行列式定义及行列式的计算

教学重点：n 阶行列式定义及计算

教学难点：n 阶行列式定义

一、导入　　线性方程组和矩阵在工程技术领域里有着广泛的应用，而行列式就是研究线性方程组的求解理论和矩阵理论的重要工具。

二、新授

（一）　二阶、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1.1)$$

采用加减消元法从方程组里消去一个未知量来求解，为此：

第一个方程乘以 a_{22} 与第二个方程乘以 a_{12} 相减得

$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\ x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

第二个方程乘以 a_{11} 与第一个方程乘以 a_{21} 相减得

$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\ x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

若 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad (1.2)$$

容易验证（1.2）式是方程组(1.1)的解。

称 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 为**二阶行列式**，它称为方程组（1.1）的系数行列式，记为 D。我们若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

方程组的解（1.2）式可写成　$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$　　　　$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.3)$$

与二元线性方程组类似，用加减消元法可求得它的解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.4)$$

为方程组（1.3）的系数行列式，D_j（j=1,2,3)是将 D 的第 j 列换成常数列而得到的行列式。

二阶、三阶行列式可用对角线法则计算。

为研究高阶行列式的结构，下面考察等式（1.4）：

（1.4）式也可写成如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

这里 $j_1 j_2 j_3$ 是 1，2，3 的一个排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和。

（二）n 阶行列式的定义

1. 定义：把由 n^2 个数排成 n 行 n 列的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

称为 n 阶**行列式**,它等于所有取自(1.5)中属于不同行同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和。这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，当 $\tau(j_1 \ j_2 \ \cdots \ j_n)$ 是偶数时，乘积项前面取正号，当 $\tau(j_1 \ j_2 \ \cdots \ j_n)$ 是奇数时，乘积项前面取负号。亦可以将这一定义写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.6)$$

等式（1.6）右边表示此 n 阶行列式的展开式，亦表示 n 阶行列式的值。

当 n=2 或 n=3 时(1.6)式表示二阶或三阶行列式,我们还规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a。

2. 例:计算行列式

(1) $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$

解:

$$D_4=\begin{vmatrix}0&0&0&a_{14}\\0&0&a_{23}&0\\0&a_{32}&0&0\\a_{41}&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

$$D_4=\begin{vmatrix}0&a_{12}&0&0\\0&0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0&0\\0&0&a_{43}&0\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(2413)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$

根据例中（1），对于 n 阶对角行列式可证得下面的结论：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例 5 求下面四阶上三角行列式的值

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{vmatrix}$$

解：根据行列式的定义可知，若乘积项不为零，第一列只能取 a_{11}，第二列两个非零元素只能取 a_{22}，第三列三个非零元素只能取 a_{33}，第四列四个非零元素只能取 a_{44}，故此

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

对于 n 阶上、下三角行列式，我们可以证得以下结论：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\qquad\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{。}$$

由此，设法将一般高阶行列式化成三角行列式再求值，是计算行列式的一种简单方便的方法。

（三）n 级排列 及其奇偶性

1. 定义：由 n 个数 1，2，3，……，组成的一个有序数组称为一个 ***n*** **级排列**。

例 1 4321 是一个 4 级排列，35241 是一个 5 级排列．123…n 是一个 n 级排列，它是唯一一个按着由小到大的次序组成的 n 级排列，称它为 ***n*** **级标准排列**.

2. 定义：在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**。在一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**。

排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1\ j_2 \cdots j_n)$。

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。

例 3 在 4 级排列中，$\tau(3412)=2+2=4$，故 4 级排列 3412 为一个偶排列。

$\tau(2341)=1+1+1=3$，故 4 级排列 2341 为一个奇排列。

定理 1.1：一个排列中的任何两个元素对换，排列改变奇偶性

§1.2 n阶行列式的基本性质

教学目的：了解和掌握 n 阶行列式的基本性质

教学重点： n 阶行列式的基本性质

教学难点：n 阶行列式基本性质及利用行列式的性质计算行列式

一、导入：复习第一节内容

二、新授

（一）定义：将行列式 D 的行列位置互换后所得的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（二）性质

性质 1：行列式 D 与它的转置行列式 D^T 值相等，即 $D=D^T$。

性质 1 说明行列式中行与列的地位是相同的，所以凡对行成立的性质，对列也成立。

性质 2：行列式中任意两行（列）互换后，行列式的值仅改变符号。

若设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad 则\ D=-D_1\ 。$$

证明：$D=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_j\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{jj_j}\cdots a_{nj_n}$，根据定理 1，

$$D_1=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_j\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{jj_j}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_j\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{jj_i}\cdots a_{ij_j}\cdots a_{nj_n}=-D.\text{证毕}$$

性质 3：若行列式中有两行（列）元素完全相同，则行列式值等于零。

证明： 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 i 行与 j 行交换，由性质 2 得 $D=-D$，于是 $2D=0$，即 $D=0$。

由行列式的定义可直接证得：

性质 4：以数 k 乘行列式的某一行（列）中所有元素，就等于用 k 去乘此行列式。即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者说，若行列式的某一行（列）中所有元素有公因子，则可将公因子提取到行列式记号外面。

性质 5：若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值等于零。

根据性质 3、性质 4 可推出：

性质 6：若行列式中有两行（列）的元素成比例，则行列式的值等于零。

由行列式定义可证得：

性质 7：若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据性质 4、6、7 可证得：

性质 8：若在行列式的某一行（列）元素上加上另一行（列）对应元素的 k 倍，则行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在计算行列式时，为了便于检查运算的正确性，一般注明每一步运算的依据。为此我们约定采用如下的记号：

用 r_i+kr_j 表示在行列式的第 i 行元素上加上（减去）第 j 行对应元素的 k 倍。

用 c_i+kc_j 表示在行列式的第 i 列元素上加上（减去）第 j 列对应元素的 k 倍。

（三） 例 1 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

解：

$$D_4 \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ -5 & 1 & 3 & -3\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_4+5r_1}}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 4 & -6\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -8 & 4 & -6\\ 0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_4-8r_2}}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 8 & -10\\ 0 & 0 & -10 & 15\end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 8 & -10\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{vmatrix} = 40$$

例 2 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

解：这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 7，所以有

$$D_4 \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix}7 & 7 & 7 & 7\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-r_1}}{=} 7\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = 189$$

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 297 & 101 & 99\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}$$

解：根据行列式的性质有

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 297 & 101 & 99\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 300-3 & 100+1 & 100-1\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 300 & 100 & 100\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix} = 12-10=2$$

例 4 计算行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} au+cv & as+ct \\ bu+dv & bs+dt \end{vmatrix}$$

解：

$$D_2=\begin{vmatrix} au+cv & as+ct \\ bu+dv & bs+dt \end{vmatrix} \overset{性质7}{=} \begin{vmatrix} au & as \\ bu & bs \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} au & ct \\ bu & dt \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cv & as \\ dv & bs \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cv & ct \\ dv & dt \end{vmatrix}$$

$$\underset{性质6}{\overset{性质4}{=}} ut\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+vs\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$

$$=ut(ad-bc)+vs(bc-ad)=(ad-bc)(ut-vs)$$

例 5 解下列方程

（1）$\begin{vmatrix} x & b & b & \cdots & b & b \\ b & x & b & \cdots & b & b \\ b & b & x & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x & b \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}=0$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0$

解：（1）这是一个用 n 阶行列式表示的方程，在这个方程中，未知量 x 的最高次是 n，所以方程有 n 个根。解这类方程的基本思路是先用行列式的性质将其化简，写出未知中量 x 的多项式，然后再求出它的根。这个方程左端是一个 n 阶字母行列式设为 D_n，计算时需要一些技巧。先化简行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)b & b & \cdots & b & b \\ x+(n-1)b & x & \cdots & b & b \\ x+(n-1)b & b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)b & b & \cdots & x & b \\ x+(n-1)b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} \overset{提取因子}{=} [x+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & x & b & \cdots & b \\ 1 & b & x & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \vdots \\ r_n-r_1}}{=} [x+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$$

于是原方程式为 $[x+(n-1)b](x-b)^{n-1}=0$

解得原方程的解为 $x_1=(1-n)b$，$x_2=x_3=\cdots=x_n=b$ 。

（2） 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1-3c_4 \\ c_2+2c_4 \\ c_3+5c_4}}{=} \begin{vmatrix} -5 & 8 & 13 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5(x-4)(x+5)$$

于是原方程式为　5（x—4）（x+5）=0，解得 x_1=4，x_2=-5。

练习

用行列式的性质证明：

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$　　（2）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

3. 小结：本节学习了 n 级排列、逆序逆序数奇排列偶排列 n 阶行列式定义及行列式的计算，n 阶行列式的基本性质，应掌握利用行列式的性质计算行列式的方法

§1.3 n 阶行列式的按行(列)展开

教学目的：使学生了解和掌握 n 阶行列式的按行(列)展开

教学重点：n 阶行列式的按行(列)展开

教学难点：n 阶行列式的按行(列)展开

一、　导入

二、　新授

（一）造零降阶法

1. 定义：在 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所留下的 n-1 阶行列式称作元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，并记　A_{ij} =（-1）$^{i+j}$ M_{ij}

A_{ij} 称作元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

2. 例 1 在四阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ 中元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}\qquad A_{23}=（-1）^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

在三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&3&3\\1&0&2\end{vmatrix}$$ 中元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=3\qquad A_{31}=（-1）^{3+1}M_{31}=-3$$

（二）．**定理 1**：一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，则这个行列式等于元素 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证明：分两种情形来证。首先证明位于第 1 行第 1 列的情形，此时行列式为

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

由行列式定义，并注意到第可 1 行中除第 1 列外其余列元素全为零。可将 D_n 表示为

$$D_n=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

而按行列式定义 又有

$$M_{11}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

于是 $D_n=a_{11}M_{11}$ 又 $A_{11}=（-1）^{1+1}M_{11}=M_{11}$

从而 $D_n=a_{11}A_{11}$

再证一般情形。此时行列式可设为

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

把 D_n 行列作如下的调换：把 D_n 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第 1 行对调，这样 a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为 $i-1$。再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…、第 1 列对调，这样元素就调到左上角 a_{11} 位置，调换次数为 $j-1$。最终经过 $i+j-2$ 次调换，把元素调到 a_{11} 位置，而所得的行列式应为

$$D_1=（-1）^{i+j-2}D=（-1）^{i+j}D$$

由于 a_{ij} 位于 D_1 的左上角，利用前面的结果，有 $D_1=a_{ij}M_{ij}$

于是 $D_n=（-1）^{i+j}D_1=（-1）^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$ 。

例 2 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-1&2\\-4&2&3&4\\2&0&1&-1\\1&5&3&-3\end{vmatrix}$$

解：利用定理 1，先对第三行进行造零，则有

$$D_4\overset{\substack{c_1-2c_3\\c_4+c_3}}{=}\begin{vmatrix}4&1&-1&1\\-10&2&3&7\\0&0&1&0\\-5&5&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&1&1\\-10&2&7\\-5&5&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_3}{=}\begin{vmatrix}5&1&1\\-8&2&7\\0&5&0\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}5&1\\-8&7\end{vmatrix}=-215$$

例 3 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}2&4&6&8&10\\1&-1&0&0&0\\0&2&-2&0&0\\0&0&3&-3&0\\0&0&0&4&-4\end{vmatrix}$

解：这个行列式从第二行开始，每一行元素之和都等于零，故此将第 2、3、4、5 列分别加到第 1 列上得

$$D_5=\begin{vmatrix}30&4&6&8&10\\0&-1&0&0&0\\0&2&-2&0&0\\0&0&3&-3&0\\0&0&0&4&-4\end{vmatrix}$$

$$=30\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\\0&0&4&-4\end{vmatrix}=30\times24=720$$

例 4 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

解：本行列式具有每一行（列）元素之各都相同，因此把第 2、3、…、n-1 列都加到第一列上，可得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{提取因子}}{=}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_n-r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 5 证明范德蒙（vandermonde）行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

证明：用数学归纳法证明。

当 n=2 时，有

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$$

命题成立。

假设命题对 n-1 阶范德蒙行列式成立。

下面证明命题对 n-1 阶范德蒙行列式也成立。

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\underset{r_2-x_1r_1}{\overset{\substack{r_n-x_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-x_1r_{n-2}}}{=}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由命题假设

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)(x_4-x_3)\cdots(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

代入上式，得

$$D_n = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i) \quad .$$

（三）**行列式按某一行（列）展开定理**

定理 2：n 阶行列式 D_n 的值等于它任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

（i=1，2，…，n）

或者

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{\ j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

（j=1，2，…，n）

证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{22}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{定理2}}{=} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

类似地，可证明

$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ （$j=1,2,\cdots,n$）

定理 2 叫做行列式按行（列）展开法则。利用这一法则并结合行列式性质，可以化简行列式的计算。

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解：根据行列式的特点，对第一列用定理 2 的方法展开可得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

推论：n 阶行列式 D_n 的任一行（列）元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$ （$i\neq j$）

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$ （$i\neq j$）

综合定理 1 和推论可得出如下表达式：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D_n,\text{当}(i=j) \\ 0,\text{当}(i\neq j) \end{cases}$$

或
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D_n,\text{当}(i=j) \\ 0,\text{当}(i\neq j) \end{cases}$$

§1.4 克拉默法则

教学目的：克拉默法则及其应用、n元齐次线性方程组
教学重点：克拉默法则及其应用

教学难点：克拉默法则的证明

一、导入
二、新授

（一）定理 1.4(克莱姆法则)：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.6)$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组（1.6）有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}，\ x_2 = \frac{D_2}{D}，\ \cdots，\ x_n = \frac{D_n}{D} \qquad (1.7)$$

其中 D_j（j=1, 2, …, n)是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：用系数行列式 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 依次乘方程组(1.6)的 n 个方程, 再把它们相加, 得

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})x_1 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})x_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj},$$

根据定理 3 的推论可知, 上式中 x_j 的系数等于 D, 而其余的系数均为零, 等式右端即为 D_j。于是有

$$Dx_j = D_j \quad （j=1，2，\cdots，n） \qquad (1.8)$$

当 D≠0 时，方程组（1.6）有唯一的一个解(1.7)。
由于方程（1.8）与方程(1.6)是同解方程, 故此, 方程(1.6)的解一定是方程(1.8)的解。而方程（1.8）仅有一个解（1.7），故方程（1,6）如果有解只可能是解（1.7）。下面验证解（1.7）是方程（1.6）的唯一解。取一个两行相同的 n+1 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad （i=1，2，\cdots，n）$$

它的值为0，把它按第一行展开，得

$$0=b_iD-a_{i1}D_1-\cdots-a_{in}D_n$$

由于D≠0，所以

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i \qquad (i=1，2，\cdots，n)$$ 。

（二） 例1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=2 \\ 2x_1-x_3+4x_4=4 \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4 \end{cases}$$

解：利用克拉默法则求方程组的解。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1-r_3}{=} -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

所以方程组有唯一解；又

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-1$$

于是方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=-2, x_3=\frac{D_3}{D}=0, x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{2}$$ 。

例2 一个土建师，一个电气师，一个机械师，组成一个技术服务队，假设在一段时间内，每人收入1元人民币需要 其它两人的服务费用和实际收入如表一，问这段时间内，每人的总收入分别是多少？

被服务者 服务者	土建师范	电气师	机械师	实际收入
土建师	0	0.2	0.3	500
电气师	0.1	0	0.4	700
机械师	0.3	0.4	0	600

（表一）

解：设土建师、电气师、机械师的总收入分别是 x_1，x_2，x_3。根据题意，列出下列方程组：

$$\begin{cases}0.2x_2+0.3x_3+500=x_1\\0.1x_1+0.4x_3+700=x_2\\0.3x_3+0.4x_2+600=x_3\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x_1-0.2x_2-0.3x_3=500\\-0.1x_1+x_2-0.4x_3=700\\-0.3x_1-0.4x_2+x_3=600\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&-0.2&-0.3\\-0.1&1&-0.4\\-0.3&-0.4&1\end{vmatrix}=0.694 \qquad D_1=\begin{vmatrix}500&-0.2&-0.3\\700&1&-0.4\\600&-0.4&1\end{vmatrix}=872$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&500&-0.3\\-0.1&700&-0.4\\-0.3&600&1\end{vmatrix}=1005 \qquad D_3=\begin{vmatrix}1&-0.2&500\\-0.1&1&700\\-0.3&-0.4&600\end{vmatrix}=1080$$

$x_1=\dfrac{D_1}{D}\approx 1256.48$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}\approx 1448.13$， $x_3=\dfrac{D_3}{D}\approx 1556.20$.

答：这段时间内，土建师的总收入是 1256.48 元，电气师的总收入是 1448.13 元,机械师的总收入是 556.20 元。

（三）n 元齐次线性方程组

1. 在线性方程组（1.6）中,当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全都为零时,即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases} \qquad (1.9)$$

称为 n 元齐次线性方程组。

零解：当系数行列式 D 不等于零时， $x_1=0$，$x_2=0$，…，$x_n=0$ 。（或称为平凡解）

非零解：（或称为非平凡解）

2. 定理 1.5：含有 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组(1.9)有非零解的充分且必要条件是：方程组的系数行列式 $D=0$。

证明：如果 $D\neq 0$，则方程组(1.9)只有唯一解是零解，因而没有非零解。

反之，如果 $D=0$ 则方程组(1.9)不是有唯一解，那么方程组(1.9)或者有解或者无解。但方程组(1.9)至少零解，因此，方程组(1.9)有无穷多解，从而除了零解之外还有非零解。

3. 例 3 求下面齐次线性方程组的解

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-x_4=0\\x_1-3x_2-6x_4=0\\2x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-1&-1\\1&3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&2&3&-1\end{vmatrix}=-22$$

所以方程组只有零解。即 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$

例 4 问 k 为何值时，方程组

$$\begin{cases}3x-y=kx\\-x+3y=ky\end{cases}$$

有非零解？

解：将方程组整理得

$$\begin{cases}(3-k)x-y=0\\-x+(3-k)y=0\end{cases}$$

根据定理 5，当且仅当系数行列式等于零时，齐次线性方程组有非零解，即

$$\begin{vmatrix}3-k & -1\\-1 & 3-k\end{vmatrix}=0 \quad ,$$

$$(3-k)^2-1=0$$

故当 k=2 和 k=4 时方程组有非零解.。

三、练习

1
$$\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3=-2\\2x_1-2x_2+5x_3=0\\3x_1+4x_2+2x_3=-10\end{cases}$$

2.. k 取何值时，下列齐次线性方程组可能有非零：

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=0\\-x_1+kx_2+x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

3. 小结：本节学习了 n 阶行列式的按行(列)展开，克莱姆克拉默法则及其应用

第二 章　矩阵

§2.1　矩阵及其运算

教学目的：使学生学习矩阵相关的概念及运算

教学重点：矩阵的概念及运算，几种特殊的矩阵

教学难点：矩阵的的乘法运算，

一、导入

矩阵是从实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，是数学研究中常用的工具，它不仅在数学中的地位十分重要，而且在工程技术各领域中也有着广泛的应用。矩阵的运算在矩阵的理论中起着重要的作用。它虽然不是数，但用来处理实际问题时往往要进行矩阵的代数

运算。

二、新授

1．**定义 1**：由$m\times n$个数排成的m行n列的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为m行n列**矩阵**（matrix）,简称$m\times n$矩阵。

一般用大写黑体字母表示：记为 **A、B、C。**为了表示行和列，也可简记为$A_{m\times n}$或$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$矩阵中数$a_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 称为矩阵的第i行第j列元素。

注意：

m=n 时是方阵，此时矩阵称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵。

n=1 称为列矩阵或列向量 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$。

m=1 称为行矩阵或行向量 $A=\left[a_1,a_2,\cdots a_n\right]$。

定义 2 ：如果两个矩阵有相同的行数，相同的列数，并且对应位置上的元素均相等。则称两个矩阵相等。记为 **A=B**。

把有相同行数，相同列数的两个矩阵称为<u>同型矩阵</u>。

例 1 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

其中a_{ij}为工厂向第i店发送第j种产品的数量。

这四种产品的单价及单价重量也可列成矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_{11}\, b_{12} \\ b_{21}\, b_{22} \\ b_{31}\, b_{32} \\ b_{41}\, b_{42} \end{bmatrix}$$

其中b_{i1}为第i中产品的单价，b_{i2}为第j种产品单价重量。

2．特殊形式矩阵：

（1） n 阶方阵：在矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$中，当$m=n$时，A称为n阶**方阵**

（2）行矩阵：只有一行的矩阵$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$叫做**行矩阵**

列矩阵：只有一列的矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ 叫做**列矩阵**

（3）零矩阵：元素都是零的矩阵称作**零矩阵**

3．相等矩阵：对应位置上的元素相等的矩阵称作**零矩阵**

4．常用特殊矩阵：

（1）对角矩阵：$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ （2）数量矩阵：$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$

（3）单位矩阵：$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

（4）三角矩阵：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称作**上三角矩阵**， $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称作**下三角矩阵**。

5.矩阵的运算

一、 矩阵的加法：

定义 3：A+ B=（a_{ij}）$_{m\times n}$+（b_{ij}）$_{m\times n}$= （a_{ij}+ b_{ij}）$_{m\times n}$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

两个同型（m 行）、同列（n 列）的矩阵相加等于对应位置上的元素相加（行与列不变）

由于矩阵加法归结为对应位置元素相加，故矩阵加法满足如下运算律

1、 交换律 **A+ B= B+ A**

2、 结合律（**A+ B**）**+C= A+ (B+C**)

3、 有零元 **A+0=A**

4、 有负元 **A+(-A)=0** $A-B=A+(-B)$

二、 数与矩阵的乘法

定义 4、给定矩阵 A=（a_{ij}）$_{m\times n}$ 及数 k,则称（ka_{ij}）$_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 A 的乘积。即 kA=

k a_{ij} = $\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$

由定义可知 **–A=(-1)×A**

A – B = A+(-B)

数与矩阵的乘法满足下列运算律（设A，B，为$m\times n$矩阵，λ，μ为数）：

（a）$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

（b）$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

（c）$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}求 3A-2B。$$

解：

$$3A-2B=3\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & 20 & 3 \end{bmatrix}$$

三、矩阵的乘法

（1） **定义 5**：设两个矩阵$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则矩阵A与矩阵B的乘积记为$C=AB$，规定$C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.)$$

(2) 矩阵的乘法满足下列运算律（假设运算都是成立的）：

(a) 结合律：$(AB)C=A(BC)$； （b）分配律：$\begin{matrix}(A+B)C=AC+BC\\ C(A+B)=CA+CB\end{matrix}$；

（c）设k是数，$k(AB)=(kA)B=A(kB)$。

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$， $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

求AB，BA与AC。

解：$AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；$BA=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

从例题中我们可以得出下面的结论：

（i）矩阵的乘法不满足交换律。即一般地说，$AB \neq BA$。

（ii）两个非零矩阵的乘积可能等于零。一般说来，$AB=0$不能推出$A=0$或$B=0$。

（iii）矩阵乘法中消去律不成立。即$AB=AC$，且$A\neq 0$，不能推出$B=C$

(3) 设A是一个n阶方阵，

定义：$A^0=E,\ \ A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个A}$（$k$是正整数）称$A^k$为$A$的$k$次方幂。

由于矩阵的乘法适合结合律，所以方阵的幂满足下列运算律：

$$A^k\cdot A^l=A^{k+l}\ ;\qquad (A^k)^l=A^{kl},$$

其中k，l为正整数。又因为矩阵乘法一般不满足交换律，所以对两个n阶方阵A与B，一般说来，$(AB)^k\neq A^kB^k$。

设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 是 x 的一个多项式，A 为任意方阵，则称

$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE$ 为**矩阵A的多项式**

四、矩阵的转置

1．定义：设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\ \text{则矩阵}\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$ 称为A的**转置矩阵**

2．矩阵的转置是一种运算，它满足下列运算律（假设运算都是可行的）：

（1）$(A^T)^T=A$　　　　（2）$(A+B)^T=A^T+B^T$

（3）$(kA\ )^T=kA^T$　　（k是数）　　（4）$(AB)^T=B^TA^T$

例 3 设 $B^T=B$, 证明$(ABA^T)^T=ABA^T$

证明：因为 $B^T=B$,　所以 $(ABA^T)^T=[(AB)A^T]^T=(A^T)^T(AB)^T=AB^TA^T=ABA^T$

3．定义：设A为n阶方阵，如果$A^T=A$，即有$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$则称$A$为**对称矩阵**。如果$A^T=-A$，即有$a_{ij}=-a_{ji}$，$a_{ii}=0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则说$A$为**反对称矩阵。**

五、 方阵的行列式

1．**定义 6**：由n阶方阵A所有元素构成的行列式（各元素的位置不变），称为n阶**方阵A的行列式**(determinant of a matrix A)，记作$|A|$ 或 $\det A$。

2．n阶行列式的运算满足下列运算律（设A，B为n阶方阵，k为数）：

（1）$|A^T|=|A|$；（2）$|kA|=k^n|A|$；（3）$|AB|=|A||B|$。

3. 小结：

本节介绍了矩阵的概念和矩阵的特殊形式和特殊矩阵以及矩阵的加、减、数乘、乘法、转置、方阵行列式的运算，这些运算在矩阵理论中占有重要地位，特别是乘法运算，要熟练掌握这些运算。

§2.2 逆矩阵

教学目的：会判断矩阵的可逆性，矩阵可逆的条件
教学重点：1．可逆性判定；2．矩阵可逆的条件
教学难点：求逆矩阵

一、导入

求逆矩阵是矩阵的一种重要运算，它在矩阵的应用中起到重要的作用。

二、新授

逆矩阵的概念

1．定义：设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使

$$AB = BA = E$$

则称A是**可逆矩阵**。并称B为A的**逆矩阵**，记为A^{-1}，即$B = A^{-1}$。

如果矩阵A是可逆的，则A的逆矩阵是唯一的。事实上，设B_1，B_2都是A的可逆矩阵，则有 $AB_1 = B_1A = E$ $AB_2 = B_2A = E$，
于是 $B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$。

2．定义：设A为阶方阵，若$|A| \neq 0$，则称A是**非奇异的**（或**非退化**）**的**，否则称A是**奇异的**（或**退化的**）。

3．定义：设$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，令$A_{ij}$为$|A|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，则称方阵

$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ 为A的**伴随矩阵**，或记为A^*。

矩阵可逆的充要条件

定理：方阵A可逆的充分必要条件是A为非奇异矩阵，即$|A| \neq 0$，并且$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

证明：充分性：设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

由第一章中定理 1.4 及推论可知

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

又知$|A| \neq 0$，所以有 $A\dfrac{A^*}{|A|} = \dfrac{A^*}{|A|}A = E$ 故 A 可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ 。 证毕。

推论 1：若 A 是可逆矩阵，则 A 经过若干次初等变换后所得矩阵仍为可逆矩阵。

推论 2：若 $AB = E$（或 $BA = E$），则 $B = A^{-1}$。

方阵的逆矩阵满足下面运算律：

（1） 若 A 可逆，则 $(A^{-1})^{-1} = A$； （2）若 A 可逆，数 $k \neq 0$，则 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$；

（3）若 A，B 为同阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

（4）若 A 可逆，则 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；（5）若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

逆矩阵的计算方法： 伴随矩阵求逆矩阵

例 1 求方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆阵。

解：求得 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ，所以 A^{-1} 存在，又

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

得 $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 所以 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

例 用伴随矩阵法求 A 的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解：因为 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 A 可逆。

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$ $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$， $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$，$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2$，$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-1$

3. 小结：

本节讲授了逆矩阵的概念、可逆条件和求逆的方法，要求会求逆矩阵。

§2.3　矩阵的分块法

教学目的：会用分块矩阵作加、减、数乘法、转置运算
教学重点：分块矩阵的乘法运算
教学难点：分块矩阵的乘法运算

一、导入

对于行数和列数较大的矩阵我们经常会采用一种分块的方法(即将高阶矩阵划分成若干个小块后再进行降阶运算)，它是计算高阶矩阵的一种有用的技巧。

二、新授

分块矩阵的概念

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，我们将 A 用若干条横线和纵线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块（或称为 A 的子矩阵），以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵。**

分块矩阵的运算

1．分块矩阵的加法：设矩阵 A 和 B 是两个同型矩阵，且采用同样的方式进行分块，则分块矩阵 A 与 B 相加，只需的把对应子块相加。

2．数与分块矩阵的乘法：数与分块矩阵相乘等于用这个数乘每一个子块。

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix} kA=\begin{bmatrix}kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s}\\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs}\end{bmatrix}$$

3．分块矩阵的乘法：设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，将它们分块成

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rt}\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tl}\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1l}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rl}\end{bmatrix}\text{其中 } C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}, (i=1,\cdots,r; j=1,\cdots,l)$$

4、分块矩阵的转置：设

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rt}\end{bmatrix}, \quad \text{则 } A^T=\begin{bmatrix}A^T{}_{11} & A^T{}_{21} & \cdots & A^T{}_{r1}\\ A^T{}_{12} & A^T{}_{22} & \cdots & A^T{}_{r2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A^T{}_{1t} & A^T{}_{2t} & \cdots & A^T{}_{rt}\end{bmatrix}$$

5、分块对角矩阵的行列式具有性质： $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_S|$

例 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{求 } A+B, AB。$$

解：按相同的分法把 A，B 分成以下子块

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E_2 & A_1\\ O & -E_2\end{bmatrix} \quad B=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 6 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_1 & O\\ B_2 & E_2\end{bmatrix}$$

则有 $A+B=\begin{bmatrix}E_2+B_1 & A_1+O\\ O+B_2 & -E_2+E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2+B_1 & A_1\\ B_2 & O\end{bmatrix}$ 而 $E_2+B_1=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

所以 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{bmatrix}$， $AB=\begin{bmatrix}E_2B_1+A_1B_2 & A_1E_2\\ -E_2B_2 & -E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1+A_1B_2 & A_1\\ -B_2 & -E_2\end{bmatrix}$

而 $B_1+A_1B_2=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 14 & -2\end{bmatrix}$， 故 $AB=\begin{bmatrix}7 & -1 & 1 & 3\\ 14 & -2 & 2 & 4\\ -6 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

3. 小结：

本节主要介绍矩阵的分块运算，作为选讲内容 ，对其概念和运算要求一般性的掌握。

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

§3.1　矩阵的初等变换

教学目的：掌握矩阵的初等变换和初等矩阵,会进行初等变换
教学重点：初等变换，利用初等变换求矩阵的逆
教学难点：利用初等变换求矩阵的逆

一、导入

矩阵的初等变换是一种奇妙的运算，它在线性代数中有着极其广泛的应用，借助它我们可以得到很多有用的的结论。

二、新授

定义 1　下面三种变换称为矩阵的初等行（列）变换：

（1）互换矩阵中两行（列）元素（记 $r_i \longleftrightarrow r_j$ 或 $c_i \longleftrightarrow c_j$）；

（2）用一个非零数 k 乘矩阵的某一行（列）（记 $k\times r_i$ 或 $k\times c_i$）；

（3）矩阵的某一行（列）元素 k 倍地加到另一行（列）对应元素上（记 $r_i+k\times r_j$ 或 $c_i + k\times c_j$）；（注意：本行的元素并没有改变）

矩阵的初等行或列变换统称矩阵的初等变换。

如果矩阵 A 经过有限次的初等变换变成 B，则称 A 与 B 等价。记做 $A \sim B$ 或 $A \to B$ 。

矩阵等价的三个性质：

（1）反身性　$A \to A$ ；

（2）对称性　若 $A \to B$，则 $B \to A$；
（3）传递性：若 $A \to B$，$B \to C$，则 $A \to C$。

行阶梯形矩阵：可画出一条阶梯线，线的下方全为零，每个台阶只有一行，即每段竖线的长度为一行，竖线后面的第一个元素为非零数。如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

等都是行阶梯形矩阵。

行最简形矩阵：在行阶梯形矩阵的基础上，每个非零行左数第一个非零元是 1，并且它所在列的其它元素都是零。

标准型矩阵：它的左上角为一个单位阵，其它元素都是零。就是 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$.

定理 1　任意一个 $m\times n$ 矩阵 A，总可以经过有限次初等**行**变换将其变成行阶梯形矩阵，进一步还可化成行最简形矩阵。

定理 2　一个非奇异矩阵 A，可以经过有限次初等行变换变成单位阵。

定理 3　任意一个 $m\times n$ 矩阵 A，总可以经过有限次初等变换将其变成标准型矩阵

定义 2（初等矩阵）对单位矩阵 E 施行一次初等变换后得到的矩阵，称为**初等矩阵**。有以下三种类型：对调、倍乘、倍加，

1．对调两行或对调两列　记为

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & \text{i列} & & & & \text{j列} & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{i行} \\ \\ \\ \\ \text{j行} \\ \\ \\ \\ \end{array}。$$

2．以 $k\neq 0$ 乘矩阵某行或某列　记为

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & \text{i列} & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{i行} \\ \\ \\ \\ \end{array},\quad \text{其中}\ \ k\neq 0。$$

3．以数 k 乘矩阵某行（列）加到另一行（列）上去　记为

$$\boldsymbol{E}(r_i+kr_j)=\boldsymbol{E}(c_j+kc_i)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \quad & & \text{i 列} & & \text{j 列} & & \quad \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{i 行} \\ \\ \text{j 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

初等矩阵有如下性质：

性质 1 初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆阵也是同类初等矩阵，

$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$； $\boldsymbol{E}^{-1}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$； $\boldsymbol{E}^{-1}(r_i+kr_j)=\boldsymbol{E}(r_i-kr_j)$

性质 2 初等矩阵的转置仍是同类初等矩阵，

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$； $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(k))$； $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(r_i+kr_j)=\boldsymbol{E}(r_j+kr_i)$

性质 3 对 $m\times n$ 矩阵 A 施行一次行初等变换相当于在 A 的左边乘一个同类 m 阶初等矩阵；而施行一次列初等列变换相当于在 A 的右边乘一个同类 n 阶初等矩阵。

初等矩阵的这个性质为计算逆矩阵提供了一个方法，讨论如下。

设 A 是 n 阶可逆矩阵，由上节定理 2（一个非奇异矩阵 A，可以经过有限次初等行变换变成单位阵）则 A 可经过有限次初等行变换变成单位阵，即存在一批初等矩阵 P_1、P_2、…、P_s，使得

$P_s \cdots P_2 P_1 A = E$，所以 $P_s \cdots P_2 P_1 = A^{-1}$，

这样，如果把将 A 化成 E 过程中的每个初等阵 P_i 都记载下来，就可得到 A 的逆矩阵 $A^{-1}=P_s \cdots P_2 P_1$，可以想象这样做也很麻烦。

采用对比的方法：

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = E,$$
$$P_s \cdots P_2 P_1 E = A^{-1},$$

就是说，对 A 做什么样的初等行变换，就对 E 做什么样的初等行变换，而不必记载中间的初等变换的具体结果，直至将 A 化成 E。

再考虑到分块矩阵的乘积，有

$P_s \cdots P_2 P_1 (A \mid E) = (P_s \cdots P_2 P_1 A \mid P_s \cdots P_2 P_1 E) = (E \mid A^{-1})$

用初等变换表示上面的过程，就是

$(A \mid E) \to (P_1 A \mid P_1 E) \to (P_2 P_1 A \mid P_2 P_1 E) \to \cdots \to$
$(P_s \cdots P_2 P_1 A \mid P_s \cdots P_2 P_1 E) = (E \mid A^{-1})$。

这就是用初等变换求逆矩阵的方法。

例 3 用初等变换法求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

例 4 用初等变换法求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

§3.2 矩阵的秩

教学目的：理解矩阵秩的概念并求解矩阵的秩

教学重点：矩阵秩的求解

教学难点：矩阵秩的求解

定义 3　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k（$k\leqslant\min\{m,n\}$）行、k 列，位于这些行列交叉处的元素，不改变顺序组成一个 k 阶行列式，称此行列式为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式。

一般地说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式不止一个，可以计算它共有 $C_m^k C_n^k$ 个 k 阶子式。

例如，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$是它的一个二阶子式，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}$是它的另一个二阶子式，它共有 $C_3^2C_4^2=18$ 个二阶子式。

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$是它的一个三阶子式，共有 $C_3^3C_4^3=4$ 个三阶子式。

$\left|a_{12}\right|$是它的一个一阶子式，它共有 $C_3^1C_4^1=12$ 个一阶子式,它无四阶和四阶以上子式。

定义 4　设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式，而所有的 $r+1$ 阶（如果存在）子式均为零，则 r 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。记做 R（$\boldsymbol{A}$）= r 。

利用定义计算一般矩阵的秩可能需要较大的计算量，不是一个好方法。因此只能计算特殊的矩阵，如阶梯形矩阵的秩。如阶梯形矩阵的秩。如

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，有 R（$\boldsymbol{A}$）= 3 。

……………………………………………………………………………………42 分钟

定理 4　矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

定理 4 给出求一般矩阵秩的方法，就是用初等变换将一般的矩阵化为阶梯形矩阵。

例 5　求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$的秩。

矩阵秩的基本性质：设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，

（1）0≤ R（$\boldsymbol{A}$）≤ $\min\{m,n\}$；

（2）R（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）= R（$\boldsymbol{A}$）；

（3）若 $\boldsymbol{A}\longleftrightarrow\boldsymbol{B}$，则 R（$\boldsymbol{B}$）= R（$\boldsymbol{A}$）。

（4）若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 R（$\boldsymbol{PAQ}$）= R（$\boldsymbol{A}$）。　　。

§3.3　线性方程组的解

教学目的: 使学生了解和掌握线性方程组的解的基本概念以及利用高斯消元法解线性方程组

教学重点：利用高斯消元法解线性方程组

教学难点：高斯消元法

一、导入

在工程技术领域中,有许多问题的讨论往往在最后归结为求解线性方程组,因此研究一

般的线性方程组在什么条件下有解,以及在有解时如何求出它全部的解，总是工程技术中提出的需要解决的一个十分重要问题,而研究一般的线性方程组的求解问题,正是线性代数的主要内容之一.在这章里我们将借助矩阵这个工具对一般线性方程组的相容性问题及解的结构问题进行讨论，介绍向量的概念、性质及方程组解的向量表示。

二、新授

（一）非齐次线性方程组和齐次线性方程组.

一般的线性方程组是指形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

的线性方程组.若记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则方程组(3.1)可写成矩阵形式　　　$AX=B$　。

当 $B\neq 0$ 时称为**非齐次线性方程组**,当 $B=0$ 时即 $AX=0$ 称为**齐次线性方程组**.

（二）高斯消元法

定理3.1：若将线性方程组 $AX=B$ 的增广矩阵 $\overline{A}=\left(A \mid B\right)$ 用初等变换化为 $\left(U \mid V\right)$，则 $AX=B$ 与 $UX=V$ 是同解方程组.

证明:由于对矩阵施行一次初等行变换等价于矩阵左乘一个初等矩阵,因此存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，使得　　$P_kP_{k-1}\cdots P_1\left(A \mid B\right)=\left(U \mid V\right)$，

记 $P_kP_{k-1}\cdots P_1=P$，由初等矩阵的可逆性知 P 可逆.若设 X_1 为 $AX=B$ 的解,即 $AX_1=B$,两边同时左乘矩阵 P,有　$PAX_1=PB$　　　$(PA)X_1=PB$　即　　$UX_1=V$

于是 X_1 是方程组 $UX=V$ 的解.反之,若 X_2 为 $UX=V$ 的解,即 $UX_2=V$

两边同时左乘矩阵 P^{-1}，得 $P^{-1}UX_2=P^{-1}V$　（$P^{-1}U$）$X_2=P^{-1}V$　　　即 $AX_2=B$

X_2 亦为 $AX=B$ 的解。

综上所述，$AX=B$ 与 $UX=V$ 的解相同，称之为同解方程组。　　　　　证毕。

2、高斯消元法：

由矩阵的理论可知，我们应用矩阵的初等变换可以把线性方程组（3.1）的增广矩阵 $\overline{A}$ 化为阶梯形矩阵(或简化阶梯形矩阵),根据定理3.1可知阶梯形矩阵(或简化阶梯形矩阵)所对应的方程组与原方程组(3.1)同解,这样通过解阶梯形矩阵(或简化阶梯形矩阵)所对应的方程组就求出原方程组(3.1)的解,这种方法称为高斯消元法.

例1解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

解:将方程组的增广矩阵用初等变换化为标准形

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0\\2&-1&3&-2&-1\\3&-2&-1&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&-1\\0&1&-4&5&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&-5&5&5\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

这时矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1 & & & +x_4 & = & 1\\ & x_2 & & +x_4 & = & 0\\ & & x_3 & -x_4 & = & -1\end{cases}$$

将 x_4移到等号右端得 $\begin{cases}x_1=1-x_4\\x_2=0-x_4\\x_3=-1+x_4\end{cases}$

若令 x_4取任意常数 t, 则得 $\begin{cases}x_1=1-t\\x_2=0-t\\x_3=-1+t\\x_4=t\end{cases}$, (3.2)

即
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

其中 x_4称为自由未知量(或**自由元**),(3.2)式称为方程组的一般解或**通解**.

例 2 求线性方程组的解

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\3x_1+x_2+2x_3=3\\x_1-2x_2+x_3=-1\\2x_1-2x_2-3x_3=-5\end{cases}$$

解:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\3&1&2&3\\1&-2&1&-1\\2&-2&-3&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&4&-4&0\\0&-1&-1&-2\\0&0&-7&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{7})r_4]{\substack{\frac{1}{4}r_2\\(-1)r_3}}\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&2&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_4\\r_3-2r_4}]{r_1-r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

根据定理 3.1 知,矩阵对应的方程组

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

与原方程组同解,因此原方程组有唯一的解.

例 3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

解:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

根据定理 3.1 知,矩阵所对应的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -4 \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_4 = 5 \end{cases} \tag{3.3}$$

与原方程组同解.但方程组(3.3)由最后一个方程可知它无解,故原方程组无解。

第四章 向量组的线性相关性

§4.1 向量组及其线性组合

教学目的：使学生了解和掌握向量、向量组的概念、线性组合

教学重点：向量的线性关系

教学难点：向量的线性关系

一、 导入

二、 新授

定义 1 n 个有次序的数所组成的数组 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 称为 **n 维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数称为第 i 个分量。特别的如果 n 维向量写成 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 称为是 n 维列向量，$\alpha^T=(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 称为是 n 维行向量。当所有 $a_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 都为实数时的向量称为 n 维实向量，当 $a_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 中含有复数时的向量称为 n 维复向量。

定义 2 在向量之间进行向量的加法和数量乘法运算，称为向量的线性运算。在一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 和一组实数 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 中进行线性运算，得到一个表达式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$，称为是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 与实数 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 的线性组合。

定义 3 给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 和 β，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$，即 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的线性组合，这时称向量 β 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表出（表示）

特别举例对线性方程组 $AX=b$ 而言，设 A 的每列为一个列向量，则方程组可以写成 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=b$，其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots n$ 是 A 的列向量组。则原来方程组

$AX=b$ 有解的叙述可以表述为"存在一组数 $x_1,x_2,\cdots x_n$，使得向量 b 可以被这组数和向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示，即 $b=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$ 。

定理 1　向量 b 能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 的秩等于矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,b)$ 的秩。

Pr.　设 A 是线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵，b 是常向量，则由前可知：线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ b 可以被这组数和向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示；又有：线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 B 的秩；由等价的传递性有 b 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ A 的秩等于 B 的秩。证毕。

定义 4　给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 和 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$，如果 A 中的每一个向量都可以被向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 线性表出，就称向量组 A 可以经过向量组 B 线性表出；如果向量组 A 和向量组 B 可以互相线性表示，这时称向量组 A 与向量组 B 等价。

当 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 经过 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 表示出来时，有：（不妨考虑两组向量中的所有向量都是具有 n 个分量的向量）

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{m}k_{ij}\alpha_i=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{1j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdots l)$$

当把 $\beta_j\quad(j=1,2,\cdots l)$ 按顺序排列起来，并考虑到矩阵乘法的规则有下式成立：（注意：在这个表示中的向量均为为列向量）

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

其中 $K=(k_{ij})_{m\times l}$ 称为这一表示的系数矩阵

对上式换个角度看问题可以发现，当把矩阵 $K=(k_{ij})_{m\times l}$ 的每一行列看成是一个向量 K_i 时，

$$\because\quad(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l)=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1l}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2l}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nl}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots k_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots k_{ml} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_m \end{pmatrix}$$

∴ 上式也可以解释为向量组 B 的行向量组 B_i 被 $K=(k_{ij})_{m\times l}$ 的行向量组线性表示出来了。

当矩阵 A 与矩阵 B 是列等价时，即矩阵 A 可以经过一系列初等列变换变成矩阵 B，由前面结论知道存在可逆的矩阵 Q，使得 $B=AQ$，

由前面讨论可知，这时矩阵 B 的列向量组可以被矩阵 A 的列向量组线性表示，又因为矩阵 Q 是可逆的，所以 $A=BQ^{-1}$，因此矩阵 A 的列向量组也可以被矩阵 B 的列向量组线性表示，即这两组列向量是等价的。

当矩阵 A 与矩阵 B 是行等价时，即矩阵 A 可以经过一系列初等行变换变成矩阵 B，由前面结论知道存在可逆的矩阵 P，使得 $B=PA$，
由上分析知这时矩阵 B 的行向量组可以被矩阵 A 的行向量组线性表示，又因为矩阵 P 是可逆的，所以 $A=P^{-1}B$，因此矩阵 A 的行向量组也可以被矩阵 B 的行向量组线性表示，即这两组行向量是等价的。

下面就来研究向量组的等价性与矩阵的等价性以及它们的秩之间的种种关系：

定理 2 向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 可以经过 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 表示出来的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l)$ 的秩，即 $R(A,B)=R(A)$ 。

Pr. ∵ $R(A,B)=R(A)\Leftrightarrow$ 矩阵方程组 $AX=B$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 矩阵 B 的列向量组可以被矩阵 A 的列向量组线性表示。

∴ 结论成立。

推论 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 与向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)=R(A,B)$，其 A,B 中是向量组 A 和 B 构成的矩阵。

Pr. ∵ 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 与向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 等价的定义是（当然是充分必要的）它们可以互相线性表示 $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$ 且 $R(A,B)=R(B)$

∴ $R(A)=R(B)=R(A,B)$

定理 3 若向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 能被向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示，则

$$R(B)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l)\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)=R(A)$$

Pr. 由定理 2 的结论知 $R(A)=R(A,B)$ ，而 $R(B)\le R(A,B)$

$\therefore\ R(B)\le R(A,B)=R(A)$ 证毕

总结以上结论可以看到：

① 一组向量 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ 能被向量另一组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 K 使 $B=AK$

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 有解

② 矩阵的行（列）向量组的等价性与向量组的线性表示之间是有关系的。

③ 给出向量组之间可以线性表示的几何解释；给出向量组等价的几何解释；给出这些关系和线性方程组之间的联系等等。

④ n 维单位坐标向量的概念——解释几何意义

向量组 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 称为是 n 维单位坐标向量，它们每一个都是 n 维向量。

例 3（见书上 P87）

§4.2 向量组的线性相关性

教学目的：理解向量组的线性相关、线性无关

教学重点：线性相关、线性无关的判别.

教学难点：线性相关、线性无关的等价条件

导入 ：

通过线性组合的概念引入线性相关性

新授：

定义 5 给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$，如果存在不全为 0 的数 $k_1,k_2\cdots k_m$ 使得线性组合

$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 是线性相关的；

否则就称它们是线性无关的。

（大量举例说明向量的线性相关性，几何空间的例子等）

定理 4 一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$（$m\ge 2$）是线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以被其它的向量线性表示。

Pr. （充分性） $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中至少有一个向量可以被其它的向量线性表示，设该向量为 α_i

则有 $\alpha_i=\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{m}k_j\alpha_j$ 即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}-\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_m\alpha_m=0$

$\therefore$ 有不全为 0 的数 $k_1,\cdots k_{i-1},-1,k_{i+1}\cdots k_m$ 使得它们的线性组合为零

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 是线性相关的。

（必要性）∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性相关的

∴ 有不全为 0 的数$k_1,k_2\cdots k_m$ 使得线性组合

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\text{成立，}$$

∵ $k_1,k_2\cdots k_m$不全为 0，设为k_i

有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_m\alpha_m=-k_i\alpha_i$

∵ $k_i\neq 0$ 等式两端同时除以$-k_i$，

则$\alpha_i=-\dfrac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\dfrac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\dfrac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}-\cdots-\dfrac{k_m}{k_i}\alpha_m$

即α_i被其它向量线性表示出来了。

举例：（1）线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 常向量b可以被系数矩阵的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性表示出来

（2）几何空间中的例子

（3）线性方程组$AX=b$增广矩阵的行向量组如果是线性相关的说明：其中至少一个方程可以用其它方程进行线性运算（方程组的初等变换）得到，是多余的方程。

（4）一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性无关的$\Leftrightarrow$要想使得它们的线性组合 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，必须所有的 $k_i=0\quad(i=1,2,\cdots m)\Leftrightarrow$线性方程组$AX=b$只有零解（其中$A$的列向量组是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$）；特别的，当$m=n$时——即$n$个$n$维向量构成的向量组线性无关$\Leftrightarrow\det A\neq 0$（或者$A$是可逆的，满秩的等等）

下面进一步分析和讨论向量组的线性相关性

定理 5 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性相关$\Leftrightarrow$它所构成的矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$的秩小于向量的个数$m$；向量组线性无关

$\Leftrightarrow R(A)=m$

Pr. （1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$AX=O$有非零解$\Leftrightarrow R(A)<m$

（上节定理 7）

（2）向量组线性无关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$AX=O$只有零解$\Leftrightarrow R(A)=m$（上节定理10）

例题（见教材 P-88，89 例 5、6）

定理 6 （1）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性相关的，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也是线性相关的；若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 是线性无关的，

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$也是线性无关的。

（2）对m个n维向量组成的向量组，当$n<m$时，向量组一定是线性相关的，特别的$n+1$个n维向量线性相关。

（3）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性无关的，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta$线性相关，则向量$\beta$必能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示，即存在$k_1,k_2\cdots k_m$ 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

Pr.（1）①若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性相关的

则存在不全为 0 的数$k_1,k_2\cdots k_m$ 使得线性组合

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \quad 成立$$

$$\therefore\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+0\times\alpha_{m+1}=0$$

$\because$ $k_1,k_2\cdots k_m$不全为 0

$\therefore$ $k_1,k_2\cdots k_m$，0 当然不全为 0

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$线性相关

②若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 是线性无关的，要证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$也是线性无关的

反证法：假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关，则由（1）知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$也必定线性相关，矛盾。

（1） 对m个n维向量组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$，当$n<m$时，即向量的个数多于向量的维数时

考虑向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$的线性组合$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$

$\because$ 该组合的等价式子为$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)X=AX=0$

当$n<m$时方程组（m个未知量，＞n个方程的情况）有无穷个解，即存在不全为 0 的数使得它们与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$的线性组合等于 0 成立，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关。

特别的$m=n+1$时上述结论可以表述为任何$n+1$个n维向量都是线性相关的；反过来叙述是不存在$n+1$个线性无关的n维向量。

（3）∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关

∴ 存在不全为 0 的数 $k_1,k_2\cdots k_m$ 以及 λ 使得

$\lambda\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

且 $\lambda\neq 0$，∵ 若 $\lambda=0$ 则会有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

而∵ $k_1,k_2\cdots k_m$ 以及 λ 不全为 0

∴ $k_1,k_2\cdots k_m$ 不全为 0 就会有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关，矛盾

∴ $\lambda\neq 0$ $\beta=-\frac{k_1}{\lambda}\alpha_1-\frac{k_2}{\lambda}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{\lambda}\alpha_m$ 证明完毕

§4.3 向量组的秩

教学目的：理解向量组的最大无关组及秩的概念，掌握向量组秩的求法
教学重点：向量组秩的求法
教学难点：最大无关组的定义及等价定理
导入 ：在前两节讨论向量组的线性组合和线性相关性时，矩阵秩起了重要作用，为进一步讨论，把秩的概念引入到向量组。
新授：

定义 6 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 是一组 n 维向量，若该向量组中的 r 个向量 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots\alpha_{k_r}$ 满足

（1）$\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots\alpha_{k_r}$ 是线性无关的

（2）而该组向量中的任何 $r+1$ 个都线性相关

则称向量组 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots\alpha_{k_r}$ 是原向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的一个极大无关组。极大无关组包含向量的个数 r 称为是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的秩，记作 R_A。规定只包含 0 向量的向量组的秩为 0。

定理 7 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。

Pr. （本定理要说明的是当矩阵的秩为 r 时，它的列（行）向量组的秩也一定为 r，即：向量组中一定包含 r 个线性无关的向量，但任何 r +1 个向量都是线性相关的）

首先说明存在 r 个线性无关的向量：

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$ $R(A)=r$

∴ 矩阵 A 存在 r 阶非零子式 D_r，不妨设为 A 的前 r 行和前 r 列

（否则可以经过行和列的对换使然）

由前面结论可知这个子式的列向量组是线性无关的

即$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}$线性无关，

则向量组$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{r+11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ a_{r+12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots \quad, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$也线性无关。（解释若相关，则必能推出

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}$也相关）

∴ 存在r个线性无关的向量

再来说明任何$r+1$个向量都线性相关

反证法：若在向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$中存在$r+1$个线性无关的向量，

不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{r+1}$，由它们排列成的矩阵为

$\tilde{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{r+1})$ 根据 P88 定理 4 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{r+1}$线性无关的充分必要

条件是$R(\tilde{A}) = r+1$，

而$\tilde{A}$的任何$r+1$阶子式都是A的$r+1$阶子式，必定为 0

∴ 矛盾。

同理可以证明：矩阵的秩也等于它的行向量组的秩。

从上面结论可见：

①对于秩为r的矩阵来说，该矩阵的非 0 子式所在的列（行）向量即为矩阵向量组的极大无关组。

②矩阵的秩与其列（行）向量组的秩相同。

③由于秩为r的矩阵的r阶非 0 子式不是唯一的，由上①有结论：向量组的极大无关组也不是唯一的。

④任何一个向量组与它的极大无关组是等价的。（说明证明过程）

举例说明极大无关组也不是唯一的以及任何一个向量组与它的极大无关组是等价的。（以R^n R^3为例）

推论（极大无关组的等价定义）： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$中的一个子组，如果它满足

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$是线性无关的，

（2）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$中的任何一个向量都能被它们线性表示

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$中的一个极大无关组。

Pr. 要证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$中的一个极大无关组，

需要说明它们满足$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$是线性无关的，并且任何$r+1$个向量都是线性相关的。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$是线性无关是定理条件，所以只要说明第二点。

反证法：假设存在$r+1$个线性无关的向量，记为$\beta_1\cdots\beta_{r+1}$

考虑它们的线性组合 $\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{i+1}\beta_i=0$ （必有λ_i全为 0）

$\because$ 所有$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}\mu_{ji}\alpha_j$

$$\therefore \sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{i+1}\beta_i=\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{i+1}\sum_{j=1}^{r}\mu_{ji}\alpha_j=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{i+1}\mu_{ji}\alpha_j=0$$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$是线性无关$\therefore$ $\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{i+1}\mu_{ji}=0 \quad (j=1,2,\cdots r)$

它的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1r+1}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2r+1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \mu_{r1} & \mu_{r2} & \cdots & \mu_{rr+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{r+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

由方程组的知识知该方程组有非解，矛盾。证毕

由矩阵的秩和其对应的向量组的秩的关系，（对前面的有关矩阵的秩的定理 1、2、3）有以下结论：

定理$2'$ 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示$\Leftrightarrow$

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_l)$$

定理$3'$ 向量组B能由向量组A线性表示，则$R_B\le R_A$

证明： 考虑它们的极大无关组即可。

例题：教材 P94 例 10、11

§4.4 线性方程组解的结构

教学目的：学习齐次线性方程组解的结构和非齐次线性方程组解的结构
教学重点：齐次线性方程组解的结构和非齐次线性方程组解的计算为重点.
教学难点：齐次线性方程组解的结构和非齐次线性方程组解的结构证明为难点.
导入 ：

研究一般的线性方程组的求解问题, 主要回答三个问题：

(1) 解的存在性，即有解问题，解的判定定理；

(2) 解的结构，即解的数量，解与解之间的关系；

(3) 求解问题，即求解方法.

通过研究(2)，可以进一步深刻理解(1)，进而对(3)的方法进行进一步优化.
新授：

一、线性方程组有解的判定定理

一般的线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

若记 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ，

则方程组(4.1)可写成矩阵形式 $AX=B$ 。

若记 $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$，则称 $\overline{A}$ 为方程组(4.1)的增广矩阵.

若记 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$,$\cdots$, $\alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，则线性方程组(4.1)可以写成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b \qquad (4.2)$$

(4.2)称为线性方程组的向量形式.

定理 8：线性方程组 (4.1)有解的充分必要条件是：其系数矩阵与增广矩阵的秩相等，即 $r(A) = r(\overline{A})$.

推论 1. 线性方程组 (4.1)有唯一解的充分必要条件是：$r(A) = r(\overline{A}) = n$.

推论 2. 线性方程组 (4.1)有无穷多解的充分必要条件是：$r(A) = r(\overline{A}) < n$.

二、齐次线性方程组解的结构

1.对于齐次线性方程组(4.3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4.3)$$

矩阵形式 $AX=0$

它的每一组解都是一个向量，称之为**解向量**(solution vector)。解向量具有如下的性质：

（1）若 X_1 是 $AX=0$ 的一个解向量，$k \in R$,则 kX_1 仍为 $AX=0$ 的解。

证明： $A（kX_1）= k（AX_1）= k0=0$， 证毕。

（2）若 X_1，X_2 都是 $AX=0$ 的解，则 X_1+X_2 仍是 $AX=0$ 的解。

证明：$A（X_1+X_2）=AX_1+ AX_2=0+0=0$。 证毕。

若用 S 表示齐次线性组(4.3)的全体解向量所成的集合，由上述性质可知，集合 S 对向量的线性运算是封闭的，所以集合 S 是一个向量空间，称为齐次线性方程组(4.3)的**解空间**.

对齐次线性方程组(4.3)的解空间我们可求它的一个基：

设系数矩阵 A 的秩为 r，则经过若干次初等行变换，总可把 A 化为简化阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由定理 8 知,矩阵对应的方程组

$$\begin{cases} x_1 & & & & +c_{1r+1}x_{r+1} & +\cdots & +c_{1n}x_n & = & 0 \\ & x_2 & & & +c_{2r+1}x_{r+1} & +\cdots & +c_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & x_r & +c_{rr+1}x_{r+1} & +\cdots & c_{rn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

与方程组(4.3)同解,即有

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = -c_{21r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

自由未知量$x_{r+1},\cdots,x_n$取任意常数$t_1,\cdots t_{n-r}$，得其通解

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r} \\ x_2 = -c_{21r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{rr+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ x_{r+2} = t_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

写成其向量形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-r}\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

若令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \eta_1 = \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \eta_{n-r} = \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则通解表示为　　$X = t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \cdots + t_{n-r}\eta_{n-r}$.

2．定义 8：设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是齐次线性方程组 AX=0 的一组解，如果

（1）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关；

（2）AX=0 的任一个解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出，则称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为齐次线性方程组 AX=0 的一个**基础解系**.

3．**定理 9：**在齐次线性方程组 AX=0 有非零解时（即 $r(A)$=r<n）则它有基础解系，且基础解系中所含解的个数等于 $n-r$.

例 1 求方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$ 的通解和基础解系.

解：利用矩阵的初等变换将系数矩阵化成简化阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应一个与原方程组等价方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$ （其中 x_2，x_4 为自由未知量）

取 $x_2=t_1$，$x_4=t_2$ ，（t_1，t_2 为任意常数），得通解

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$ ，写成向量形式 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

而 $$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

就是原方程组的一个基础解系. 因此通解也可表示为 $X = t_1\eta_1 + t_2\eta_2$，（$t_1$，$t_2$ 为任意常数.

三、非齐次线性方程组解的结构

对于非齐次线性方程组(4.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

或 $AX=B$

它的解具有下述性质:

(1) 若 X_1，X_2 都是 $AX=B$ 的解，则 X_1-X_2 是 $AX=0$ 的解。

证明：$A（X_1-X_2）=AX_1- AX_2=B-B=0$。 证毕。

(2) 若 X_0 为 $AX=B$ 的解, X^*为 $AX=0$ 的解, 则 X_0+X^*必为 $AX=B$ 的解.

证明： $A(X_0+X^*)=AX_0+AX^*=B+0=B$。 证毕。

定理 10： 设 X_0 是非齐次线性方程组(4.1)的一个特解, X^*是非齐次线性方程组(4.1)所对应的齐次线性方程组(称为导出组) $AX=0$ 的通解, 则非齐次线性方程组(4.1)的通解可表示为

$$X=X_0+X^*$$

证明：因 $AX=B$, $AX_0=B$, 由性质(1)知 $X-X_0$ 是 $AX=0$ 的任意一个解.

令 $X^* = X - X_0$

故 $X = X_0 + X^*$ 。 证毕。

例 2　求方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

解:对增广矩阵进行初等行变换

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见，$r(A) = r(\overline{A}) = 2$，故方程组有解，并可得与原方程组同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 - 2x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + x_2 + x_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + 2x_4 \end{cases}$$ （其中 x_2，x_4 为自由未知量）

取 $x_2 = t_1$，$x_4 = t_2$ （t_1，t_2 为任意常数），得通解

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$ 写成向量形式 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$。

而向量 $X_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ 是原方程组的一个特解。$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是其导出组的一个基础解系。

故所求通解也可表示为 $X = X_0 + t_1\eta_1 + t_2\eta_2$ （t_1，t_2 为任意常数）。

四．小结：本节学习齐次线性方程组的解的结构以及非齐次线性方程组的解的结构，要求会求齐次线性方程组以及非齐次线性方程组的通解.

五．作业：

：　对方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

问 k 取何值时方程组有唯一解?无穷多解?无解?在有无穷多解时求出通解.

解:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&5\\3&2&k&18-5k\\0&1&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}k&0&-1&3\\3&0&k-4&14-5k\\0&1&2&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{k}{3}r_2}\begin{bmatrix}0&0&\frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1&\frac{5}{3}k^2-\frac{14}{3}k+3\\3&0&k-4&14-5k\\0&1&2&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}3&0&k-4&14-5k\\0&1&2&2\\0&0&\frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1&\frac{5}{3}k^2-\frac{14}{3}k+3\end{bmatrix}$$

(1) 当 $\frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1\neq 0$ 时，即当 $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3=n$ 有唯一解.

(2) 当 $k=1$ 时, 也有 $\frac{5}{3}k^2-\frac{14}{3}k+3=0$, 故 $r(A)=r(\overline{A})=2$, 方程组有无穷多解, 通解含有 $n-r(A)=3-2=1$ 个任意常数. 此时矩阵对应的方程组 $\begin{cases}3x_1-3x_3=9\\x_2+2x_3=2\end{cases}$ 与原方程组同解,

其通解为 $\begin{cases}x_1=3+t\\x_2=2-2t\\x_3=t\end{cases}$ 或 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

(3) 当 $k=3$ 时，$r(A)=2<3=r(\overline{A})$, 方程组无解.

2: 求下列齐次线性方程组的通解 $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\-5x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\-x_1-11x_2+2x_3-5x_4=0\\3x_1+5x_2+x_4=0\end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\-5&1&-2&3\\-1&-11&2&-5\\3&5&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-3r_1}]{r_2+5r_1}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&-14&3&-7\\0&14&-3&7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{14}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{14}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\-5&1&-2&3\\-1&-11&2&-5\\3&5&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+5r_1\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&-14&3&-7\\0&14&-3&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\r_4+r_2}}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{14}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{14}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

此矩阵对应的方程组

$$\begin{cases}x_1 \quad +\frac{5}{14}x_3-\frac{1}{2}x_4=0\\ \quad x_2-\frac{3}{14}x_3+\frac{1}{2}x_4=0\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x_1=-\frac{5}{14}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=\frac{3}{14}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$ （其中 x_3,x_4 为自由未知量），

取 $x_3=t_1,x_4=t_2,(t_1,t_2$为任意常数)，则方程组的通解可写成：

$$\begin{cases}x_1=-\frac{5}{14}t_1+\frac{1}{2}t_2\\ x_2=\frac{3}{14}t_1-\frac{1}{2}t_2\\ x_3=t_1\\ x_4=t_2\end{cases}\quad 或\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix}-\frac{5}{14}\\\frac{3}{14}\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}。$$

解中两个（即 $n-r(A)$ 个）非零向量 $\eta_1=(-\frac{5}{14},\frac{3}{14},1,0)^T$，$\eta_2=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1)^T$ 都是方程组的解可称它们为该方程组的基础解系。

§4.5　向量空间

教学目的：学习向量空间，理解维数、及基的概念
教学重点：理解维数、基的概念
教学难点：坐标变换公式
导入 ：
新授：
定义 9 设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对向量的
加法和数量乘法两种运算封闭，就称集合V为向量空间。
（解释概念中封闭的含义，举例：几何空间的例子，教材中 P104-105 例 17-23，特别解释“齐次线性方程组的解空间”、“全体不超过n次的多项式的集合”，由一组向量生成（Span）的空间等概念）

定义 10 设有向量空间V_1及V_2，若$V_1 \subseteq V_2$，就称V_1是V_2的子空间，特
别的若有$\alpha \in V_1$但$\alpha \notin V_2$，则V_1称为V_2的真子空间。

例 集合{0}以及V自身都是V的子空间。

定义 11 设V为向量空间，如果r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r \in V$，且满足

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$线性无关

（2）V中任一向量都能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$线性表示

那么，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$就称为向量空间$V$的一组基，基向量的个数$r$称为向量空间$V$的维数，$V$称为$r$维向量空间。
（多多举例）

当$\beta \in V$时，由上显然有$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_r\alpha_r$，数组$x_1 \cdots x_r$称为向量$\beta$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$下的**坐标**。

例题 在R^n中，因为对一个向量空间来说基不是唯一的，所以同一个向量在不同的基下的坐标是不同的。它们的关系如何呢——**“过渡矩阵”**的概念。

设向量β 在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$和$\tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\alpha}_n$下的坐标分别为$X, Y$，即

$$\therefore \ \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

那么，向量X, Y之间会有什么关系呢？

（注意它们都是n维基向量，故它们构成的矩阵都是可逆方阵）

设 $$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为从基向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$到$\tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\alpha}_n$的**过渡矩阵**。（一组向量可以被基向量线性表示）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=AY$$

或$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}X$

第五章 相似矩阵及二次型

§5.1　向量的内积、长度及正交性

教学目的：理解并掌握向量的内积、长度、正交性
教学重点：正交性

教学难点：施密特正交化

导入 ：在向量空间中，还没有几何空间中大家已经熟悉的"度量"（这里解释度量的含义）的概念。如何在一些向量空间中建立度量的概念呢？这是本章要研究的主要内容之一。（注意：并不是所有向量空间中都可以建立"度量"，提示：向量空间有有限维的，也有无限维的，本课程只研究有限维的情况）

新授：

为了引进度量的概念，首先先在向量空间中定义一种运算：

定义 1　设有 n 维向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$， $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，令 $[x,y]=X^TY=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

$[X,Y]$ 称为向量 X 与 Y 的内积。

实际上，内积是 R^n 到 R^1 的一个映射，也就是说，任给 R^n 中的两个向量，都可以按照上面原则对应一个实数 $[X,Y]$。

下面就对这个映射进行进一步的研究。

内积具有如下性质：（用 X,Y,Z 表示 n 维向量，λ 表示实数）

（ i ） $[X,Y]=[Y,X]$

（ ii ） $[\lambda X,Y]=\lambda[X,Y]$

（iii） $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$

（iv） $[X,X]\geq 0$， $[X,X]=0\Leftrightarrow X=0$

（证明过程讲，教案略）

※（Schwarz）施瓦茨不等式： $[X,Y]^2\leq[X,X][Y,Y]$ ，等号成立当且仅当向量 X,Y 线性相关。（教材没有证明）

Pr. 当 $Y=0$ 时等号显然成立

下面不妨设 $Y\neq 0$

令 t 是一个实变量，作向量 $Z=X+tY$

由向量的内积的性质知 $[Z,Z]=[X+tY,X+tY]\geq 0$ （对任何 t 成立）

$\therefore$ $[X,X]+t^2[Y,Y]\geq -2t[X,Y]$　 特别的取 $t=-\dfrac{[X,Y]}{[Y,Y]}$ 代入时

有结论成立。

向量 X,Y 线性相关显然等号成立；反之当等号成立时，由上可得：$Y=0$ 或者 $X-\dfrac{[X,Y]}{[Y,Y]}Y=0$，$\therefore$ 向量 X,Y 线性相关。（证毕）

在几何空间中，利用了向量的内积定义了向量的夹角和长度：

$X \bullet Y = |X||Y|\cos\vartheta$ ，其中θ是向量X,Y的夹角。现在没有明确的几何直观。类似的定义向量的长度如下：

定义 2　记 $\|X\| = \sqrt{[X,X]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$　　称$\|X\|$为n维向量X的长度或<u>范数</u>。当$\|X\| = 1$时称X为单位向量。

向量的范数具有以下性质：

（ⅰ）非负性　$\|X\| \geq 0$，$\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$

（ⅱ）齐次性　$\|\lambda X\| = \lambda \|X\|$　$\lambda \in R^1$

（ⅲ）三角不等式　$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

证明：性质（ⅰ）、（ⅱ）显然

（ⅲ）
$$\|X+Y\|^2 = [X+Y, X+Y] = [X,X] + 2[X,Y] + [Y,Y]$$
$$\leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\sqrt{[X,X][Y,Y]} = (\|X\| + \|Y\|)^2$$
（利用了施瓦茨不等式）

并且，由于 $|[X,Y]| \leq \|X\|\|Y\|$

$$\therefore \quad \left|\frac{[X,Y]}{\|X\|\|Y\|}\right| \leq 1 \qquad （当\|X\|\|Y\| \neq 0 时）$$

于是可以定义　$\theta = \arccos \dfrac{[X,Y]}{\|X\|\|Y\|}$　称为n维向量X与Y的夹角。

特别的如果$[X,Y] = 0$时，显然$\theta = 90°$ ，这时把几何空间中向量垂直的概念加以推广则有下面的概念：

定义 3　当$[X,Y] = 0$时，称n维向量X与Y正交，显然 0 向量与任何向量都满足内积为 0，所以规定 0 向量与任何向量都正交。对一组向量$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$来说，如果它们是两两正交的，就称$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$是正交向量组。

对正交向量组有以下性质：

定理 1　若n维向量组$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$是一组两两正交的非零向量，则$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$线性无关。

Pr.　设有一组数$k_1, k_2 \cdots k_r$使得　$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = 0$

对该等式两端分别用α_j^T左乘（即用它作内积）有

$$k_1 \alpha_j^T \alpha_1 + k_2 \alpha_j^T \alpha_2 + \cdots k_r \alpha_j^T \alpha_r = \alpha_j^T \cdot 0 = 0$$

上式中除了$\alpha_j^T \alpha_j = \|\alpha_j\| \neq 0$，其它均为 0

∴　$k_j=0$　（$j=1,2,\cdots r$）故$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关。（例 P115 例 1）

既然一组两两正交的非零向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关，当它们是向量空间的基时，是一组特别的基，给一个特别的名称：

定义 4　设向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_r$是向量空间$V$ ($V\subset R^n$) 的一组基，并且它们是两两正交的单位向量，就称向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_r$是向量空间$V$的一组规范（标准）正交基。

举例解释，尤其是直角坐标系的例子，还有向量在规范正交基下的坐标的例子。

那么，如何从一组基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$得到一组规范正交基$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$呢？下面解决这个问题，这个过程称为施米特(Schimidt)正交化过程。

首先是（1）正交化过程，然后是（2）单位化过程。具体如下：

（1）　$\beta_1=\alpha_1$　　$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$

($[\beta_1,\beta_2]=\left[\alpha_1,\alpha_2-\dfrac{[\alpha_1,\alpha_2]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1\right]=[\alpha_1,\alpha_2]-\dfrac{[\alpha_1,\alpha_2]}{[\alpha_1,\alpha_1]}[\alpha_1,\alpha_1]=0$ 其它类似可用归纳法证明)

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

… … .. …

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$

可以证明$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$两两正交。

(2)　再令$\varepsilon_i=\dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$　（$i=1,2,\cdots r$）则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_r$是一组规范正交基。

例题：教材 P116-117

当把n个两两正交的n维单位向量排列成为一个矩阵A时显然有$A^TA=E$。对于这种矩阵我们给出一个概念，因为它有着明显的几何意义。

定义 5　如果n阶矩阵满足$A^TA=E$，称A为正交矩阵，简称正交阵。

对正交矩阵来说因为$A^TA=E$，所以矩阵A是可逆的，并且有$A^{-1}=A^T$，正交矩阵的几何意义可以从下面分析得到：

定义 6　若P为正交矩阵，则线性变换$Y=PX$称为正交变换。

（其中X,Y是向量）

对正交变换下的向量X,Y进行求长度的运算，可以发现：

$\|Y\|^2=[Y,Y]=[PX,PX]=X^TP^TPX=X^TEX=X^TX=\|X\|^2$

即，在正交变换之下，向量的长度没有改变，这种变换一般在物理学（力学）中称为刚体变换。

§5.2　方阵的特征值与特征向量

教学目的：理解并掌握特征值、特征向量，掌握特征值、特征向量的求法

教学重点：掌握特征值、特征向量的求法

教学难点：特征值、特征向量的求法

导入 ：在前面的研究中我们看到，矩阵的各种特性（比如对应的行列式、矩阵的秩等）对于解决各种问题都是十分重要的。矩阵还有一个十分重要的特性就是对于方阵来说，它的所谓“特征值”也是十分重要的。本节就来学习相关知识。

新授：

定义 7　设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 X 使关系

$AX=\lambda X$ 成立，则称数 λ 为矩阵 A 的特征值，非零列向量 X 称为 A 的对应于 λ 的（属于 λ 的）特征向量。

从特征值以及特征向量的定义可以得到：

λ　　和向量 X 满足　$(A-\lambda E)X=0$

并且，由于 X 是非零列向量，A 是 n 阶矩阵，所以

$|A-\lambda E|=0$，也就是说 λ 是方程 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ 的根。

因此**方程 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ 称为矩阵 A 的特征方程**，所以矩阵的特征值实际上就是特征方程的根。

而对于某个特征值来说（$\because$ $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ 是关于 λ 的 n 次多项式　$\therefore$根有可能为重根）

求出方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的基础解系就能够得到所有对应于 λ 的特征向量。

看两个求矩阵的特征值和特征向量的例子（P120-122）

进一步分析矩阵的特征值和特征向量，可见如下特性：

（1）根据方程的根与系数的关系有：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$　（当考虑复数根时，有 n 个根）

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$$

（2）设 λ　是方阵 A 的特征值。则 λ^2 是 A^2 的特征值；当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值。

Pr. $\because$　$AX=\lambda X$　　$\therefore$　$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda^2X$

故 结论成立

又 $X=\lambda A^{-1}X$ $\therefore$ $A^{-1}X=\dfrac{1}{\lambda}X$ 故 结论成立

对于特征值以及特征向量还有一个重要的结论就是：

定理 2 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_r$是矩阵$A$的$r$个互不相同的特征值，$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$依次是与之对应的特征向量，则向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$线性无关。

Pr. 考虑$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\eta_i=0$

则有 $A(\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\eta_i)=A\cdot 0=0$

即 $\sum\limits_{i=1}^{r}x_iA\eta_i=\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\lambda_i\eta_i=0$

再用A左乘有 $\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\lambda_i^2\eta_i=0$，

依此类推可以得到 $\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\lambda_i^k\eta_i=0 \quad (k=1,2,\cdots r-1)$

$$\therefore \quad \text{有}\begin{pmatrix}x_1\eta_1 & x_2\eta_2 & \cdots & x_r\eta_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1}\end{pmatrix}=O$$

$\because$ λ_i互不相同，根据范德蒙行列式的结果知道$x_i\eta_i=0$

但$\eta_i\neq 0$ $\therefore$ $x_i=0 \quad (i=1,2,\cdots r)$ 故$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$线性无关。

例 10 见教材 P123