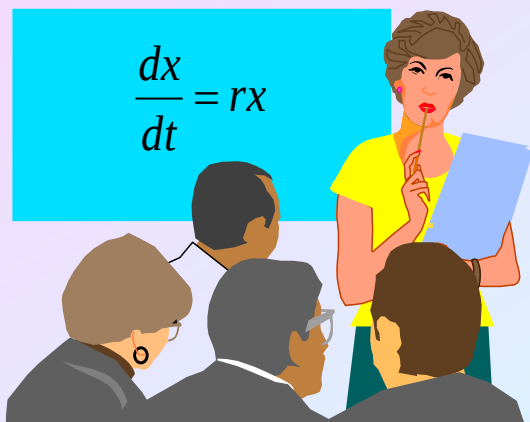


精心选择案例

建设新形态教材

——《数学模型》(第五版) 简介



清华大学 姜启源

jiangqy@tsinghua.edu.cn



- 数学建模教材的发展和存在的问题
- 《数学模型》（第五版）的定位与特色
- 《数学模型》（第五版）的内容和课件

预告 姜启源、谢金星、叶俊编写的《数学模型》
(第五版) 将于2017年底由高等教育出版社出版.

数学建模教材的发展

- 20世纪60-70年代数学建模教材在西方国家出现.
- 1982-1983年数学建模课程进入我国大学课堂.
- 1987年我国**第一本数学建模教材**: 姜启源编《数学模型》，由高等教育出版社出版.
- 至2000年出版的数学建模教材在30本左右，**以实际问题的建模案例为主要内容**.



1987年出版的《数学模型》(第一版)

数学建模教材的发展

- 1992年开始举办的全国大学生**数学建模竞赛**对课程教学和教材建设起了巨大的**推动作用**.
- **竞赛培训内容**逐渐成为数学建模教材的重要组成部分.
- 1999年**数学实验**课程和教材开始出现, 2000年后**建模与实验结合**的课程和教材逐渐增多.
- 2001-2010年是建模和实验教材飞速发展的十年, 这类教材**出版了200本以上**.
- 2011年后建模和实验教材出版的数量**渐缓**.

数学建模课程和教材存在的问题

- 案例研究是数学建模的主要教学形式，但是陈旧、偏难的案例对学生的吸引力下降.
- 模型求解的数学方法过多，案例成为方法的应用题，向传统的数学课程和教材靠拢，失去引入数学建模教学的初衷.
- 成为建模竞赛的培训手段，课程只为参赛者开设，教材只针对赛题展开.

《数学模型》第一版到第四版的30年

- 第一版(1987)、第二版(1993)、第三版(2003)、第四版(2011) 至今30年**累计印数99.7万册**，为国内300多所学校选用。
- 国内出版最早、版次和印数最多、**选用学校最多的**数学建模教材。
- 第一版到第四版——30年积极适应形势的发展（**建模竞赛**的推动、**计算机技术**的发展、与**数学实验**的结合、**互联网**的应用）。

《数学模型》第五版的定位与特色

- 仍**定位于数学建模教学**，而非竞赛培训；为反映竞赛的开展，**选取若干赛题融入案例**。
- 坚持**案例研究**为主，**创造**或选用简明、生动、来自生活的**新案例**；不断修订**老案例** —— “老调可以新弹”。
- 利用互联网+**建设体现建模特色的新形态教材**，包括：拓展案例、预备知识、录屏、视频、计算程序、数据表格等资源；为教师提供全套电子课件。

《数学模型》第五版的内容安排

第1章 建立数学模型

第2章 初等模型

第3章 简单优化模型

第4章 数学规划模型

第5章 微分方程模型

第6章 差分方程与
代数方程模型

第7章 离散模型

第8章 概率模型

第9章 统计模型

第10章 博弈模型

原书第四版

第7章 稳定性模型

并入第5章

第12章 马氏链模型

并入第8章

第13章 动态优化模型

撤销

《数学模型》第五版的内容安排

第2章 初等模型

2.1 双层玻璃窗的功效

2.2 划艇比赛的成绩

2.3 实物交换

2.4 汽车刹车距离与道路通行能力

2.5 估计出租车的总数

2.6 评选举重总冠军

2.7 解读CPI

2.8 核军备竞赛

2.9 扬帆远航

2.10 节水洗衣机

《数学模型》第五版的内容安排

第3章 简单优化模型

3.1 存贮模型

3.2 森林救火

3.3 倾倒的啤酒杯

3.4 铅球掷远

3.5 不买贵的只买对的

3.6 血管分支

3.7 冰山运输

3.8 影院里的视角和仰角

3.9 易拉罐形状和尺寸的最优设计

《数学模型》第五版的内容安排

第5章 微分方程模型

5.1 人口增长预测

5.2 药物中毒急救

5.3 捕鱼业的持续收获

5.4 资金、劳动力与经济增长

5.5 香烟过滤嘴的作用

5.6 火箭发射升空

5.7 食饵与捕食者模型

5.8 赛跑的速度

5.9 万有引力定律的发现

5.10 传染病模型和SARS的传播

《数学模型》第五版的内容安排

第5章 微分方程模型

- 5.1 人口增长预测
- 5.2 药物中毒急救
- 5.3 捕鱼业的持续收获
- 5.4 资金、劳动力与经济增长
- 5.5 香烟过滤嘴的作用
- 5.6 火箭发射升空
- 5.7 食饵与捕食者模型
- 5.8 赛跑的速度
- 5.9 万有引力定律的发现
- 5.10 传染病模型和SARS的传播

《数学模型》第五版的内容安排

- 全书共含**案例约90个**，其中新案例约30个（包括全国竞赛赛题8个），改编约10个.
- 全书共含**习题约230个**，其中复习题约占 $1/3$ ，放在每一节后面，训练题约占 $2/3$ ，放在每一章后面.

《数学模型（第五版）习题参考解答》
同时出版.

与教材配套的数字课程

- 拓展案例约60个：来自编者在数学建模、数学实验的教材、案例选集等.
- 预备知识约10个：包括微分方程稳定性，线性规划、线性回归的基本原理和方法等.
- 录屏、视频约20个：来自编者对教材中案例的录制.
- 计算程序、数据表格.
- 全部教材的PPT课件：由编者制作，用于帮助教师进行课堂教学.

拓展案例 2-1 磁带计数器的用途

老式的录像机上都有计数器,而没有计时器,一些录音机也有类似的情况。这种计数器有什么用呢,让我们从这样一个问题开始:一盘标明 180 分钟的录像带从头转到尾,用时 184 分,计数器读数从 0000 变到 6061。在某一次使用中录像带已经转过大半,计数器读数为 4450,问剩下的一段还能否录下一小时的节目。

如果计数器读数随着录像带的转动是均匀增加的,那么由于 4450 已经显著地超过 6061 的三分之二,录像带已经转过两小时多,所以显然不能再录一小时的节目。但是,只要你耐心地观察一下就会发现,读数并非均匀增长,而是先快后慢,这样,回答上面的问题就需要知道计数器读数与录像带转过的时间之间的关系。本节的目的是要建立表述这个关系的数学模型^[17]。

问题分析 计数器的读数是怎样变化的,它的增长为什么先快后慢,回答这些问题需要了解计数器的简单工作原理(图 1)。

录像带有两个轮盘,一开始录像带缠满的那个轮盘不妨称为左轮盘,另一个为右轮盘。计数器与右轮盘的轴相连,其读数与右轮转动的圈数成正比。开始时右轮盘是空的,读数为 0000,随着带子从左向右运动,右轮盘半径增加,使得转动越来越慢,计数器读数的增长也就越来越慢。

在录像带的运动过程中,与微型电机相连的主动轮的转速当然是不变的,录像带靠压轮压在主动轮上,所以录像带的运动速度(线速度)为常数(想想看,如果录像带通过磁头时的速度不是常数,我们看到的画面会是怎样的),而右轮盘随着半径的增加,其转速当然越来越慢了。

筑规范要求 $h=l/d \approx 4$ 。按照这个的
单层窗节约热量 97% 左右。不
与极低的热传导系数 k_2 ,而这要
实际环境下当然不可能完全满
外,应该注意到,一个房间的热
天花板、墙壁、地面等流失。



拓展案例 2-1
磁带计数器的用途

上面再加一层墙。假定仍然考虑热传
相关数据作简单计算。

人艇、四人艇、八人艇四种,各种
艇 1964—1970 年四次 2 000 m
(和两次世界锦标赛),见表 1 第
成绩与桨手数量之间存在着某

表格

艇宽 b /m	L/b	艇重 w_0 /kg 桨手数 n
0.293	27.0	16.3
0.356	27.4	13.6
0.574	21.0	18.1
0.610	30.0	14.7

部分与水之间的摩擦力。艇靠桨
前进的动力越大。但是艇和桨手
的阻力将抵消一部分增加的动

力。艇慢目的是寻求桨手数量与比赛成绩(航行一定距离所需时间)之间的数量规律。如果假设艇速在整个赛程中保持不变,那么只需构造一个静态模型,使问题简化为建立桨手数量与艇速之间的关系。注意到在实际比赛中桨手在极短的时间内使艇加速到最大速度,然后把这个速度保持到终点,那么上述假设也是合理的。

为了分析所受阻力的情况,调查了各种艇的几何尺寸和质量,表 1 第 7 至 10 列给出了这些数据。可以看出,桨手数 n 增加时,艇的尺寸 L, b 及艇重 w_0 都随之增加,但比值

拓展案例 2-2 动物的身长和体重

四足动物的躯干的长度(不含头尾)与它的体重有什么关系,这个问题有一定的实际意义。比如,在生猪收购站或屠宰场工作的人们,往往希望能从生猪的身长估计出它的体重。

动物的生理构造因种类不同而异,如果陷入对生物学复杂生理结构的研究,将很难得到满足上述目的的有使用价值的模型。这里我们仅在十分粗略的假设基础上,利用类比方法,借助力学的某些结果,建立动物身长和体重间的比例关系。

把四足动物的躯干看作圆柱体、长度 l 、直径 d 、断面面积 s ,如图所示。将这种圆柱体的躯干类比作一根支撑在四肢上的弹性梁,以便利用弹性力学的一些研究结果。

设动物在自身体重 f 作用下躯干的最大垂度为 b ,即梁的最大弯曲,根据对弹性梁的研究

$$b \propto \frac{fl^3}{sd^2}$$

因为 $f \propto sl$, 所以

$$\frac{b}{l} \propto \frac{l^3}{d^2}$$

- (8) 评注 这个模型建立在一些不太精细的假设的基础上,因为我们只关心各种腿之间的相对速度,所以数学工具只用到比例方法。用这种方法建模虽然不能得到关于腿速的完整的表达式,但是对于我们的建模目的来说已经足够了。最后的结果与实际数据吻合得如此之好,恐怕有很大成分的巧合。
- (9)
- (10)
- (11)



拓展案例 2-2
动物的身长和体重

体重不超过 73 kg), 建立模型

(1)

交换一部分,达到双方满意的各种类型的贸易市场。爱程度很难给出确切的模型^[10]。

量为 y_0 ,交换后甲占有物和 y_0-y 。这样在 xOy 平面, y 都代表了一种交换方

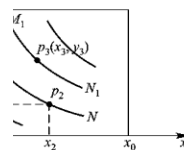


图 1 甲的无差别曲线

样满意程度的点组成一条甲的无差别曲线 MN ,

① n 只有 4 个整数点,一般情况下不宜作拟合,这只是非常粗糙的办法。

《数学模型(第五版)》案例课件



案例1 路障间距的设计

问题

校园道路需要设置路障以限制车速，如要车速不超过 40km/h ，应该相距多远设置一个路障？

分析

汽车过路障时速度接近零，过路障后加速。

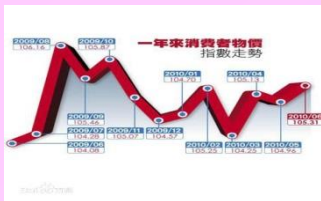
车速达到 40km/h 时让司机看到下一路障而减速，至路障处车速又接近零。

假设

相邻路障之间汽车作等加速运动和等减速运动。

建模

测试出加速度和减速度后，等加速运动和等减速运动距离之和即为相邻路障间隔。



案例2 解读CPI~居民消费价格指数

- 每月9日左右国家统计局发布上月全国CPI数据.
- 从**数学建模**的思路按照**数据分析**方法解读CPI.
- 近10年CPI平均**年增长率**不过**3.5%**，与许多人对物价的亲身感受有**较大差距**.
- CPI由各类消费品和服务**价格**及其**权重**共同决定.
- **权重**对CPI影响很大, 且**调整**不为民众及时掌握.
- 研究如何利用公布的CPI数据**校核权重**是否变化, 并**估算**调整后的**权重**.

案例3 不买贵的只买对的



消费者追求最大效用——引入效用函数来选择商品.

问题

草莓、芒果和桔子每千克价格为15元,10元和5元,准备花100元采购,怎样分配这笔钱?

x_1, x_2, x_3 ~ 购买商品数量

$U(x_1, x_2, x_3)$ ~ 效用函数

p_1, p_2, p_3 ~ 商品单价

s ~ 准备付出的钱

效用最大化
模型

$$\begin{aligned} \max & U(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n p_i x_i = s \end{aligned}$$

怎样确定效用函数,
求解效用最大化模型

诚恳希望提出宝贵意见

谢谢大家！