

5 数学建模

5.1 数学建模

数学建模 (Mathematical Modeling) 这个词在现在的时代已经随处可以听到了, 但究竟什么是数学建模呢? 按照字面的意思就是: 建立数学模型的过程. 但要想更清楚地明白这个问题, 我们首先要介绍原型与模型:

原型是指人们在现实生活中关心, 研究或者从事生产、管理的实际对象. 而**模型**是指为了某个特定的目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构成的原型的替代物. 例如, 我们在为了方便游客而绘制的各个城市的地图; 为孩子们制作的各种动物、汽车、飞机等玩具模型; 以及在科技展厅里的人造卫星模型、航天飞机模型等等, 它们都是在某种程度上满足人们的需要制作成的. 一般的说, 模型是我们所研究的客观事物有关属性的模拟, 它应该具有事物中我们关心和需要的主要特征 (或某方面的特征).

数学建模比以上提到的实物模型复杂和抽象得多, 它是对于现实中的原型, 为了某个特定目的, 做出一些必要的简化和假设, 运用适当的数学工具得到一个数学结构. 也可以说, **数学建模**是利用数学语言 (符号、式子与图象) 模拟现实的模型, 求出模型的解, 验证模型的合理性, 并用该数学模型所提供的解答来解释现实问题. 把现实模型抽象、简化为某种数学结构是数学模型的基本特征. 它或者能解释特定现象的现实状态, 或者能预测到对象的未来状况, 或者能提供处理对象的最优决策或控制.

现在举一个实例, 让大家体验一下数学建模.

例 1 某饮料厂怎样设计饮料罐使得用料最省的问题.

首先, 假设把饮料罐设计成圆柱体, 那么就有以下的参数:

V — 罐装饮料的体积

S — 制罐用材的总面积

h — 圆柱的高

r — 圆柱底的半径

t — 制罐铝材的厚度

于是有

$$V = \pi r^2 h \quad (13-1)$$

由于易拉罐上底的强度必须要大一点, 因而在制造上其厚度应为罐的其它部分的 k 倍 (根据拉力试验可以确定 k 的最小值, 因此这里 k 可看作常量). 从而有

$$S = \pi r^2 k t + \pi r^2 t + 2\pi r h t = ((k+1)\pi r^2 + 2\pi r h) t \quad (13-2)$$

每罐饮料的体积是一样的, 因而 V 可以看作常量, 则由 (13-1) 解得 $h = \frac{V}{\pi r^2}$, 代入 (13-2) 式得

$$S = ((k+1)\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}) t = ((k+1)\pi r^2 + \frac{2V}{r}) t.$$

从而知道, 要想用料最省的问题转化为求半径 r 使得 $S(r)$ 达到最小. $S(r)$ 的表达式就是一个数学模型. 我们可以运用函数导数求极值的方法求解:

$$\text{令 } \frac{dS(r)}{dr} = 2(k+1)\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \text{ 得}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{(k+1)\pi}},$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi} \sqrt[3]{\left(\frac{(k+1)\pi}{V}\right)^2} = (k+1) \sqrt[3]{\frac{V}{(k+1)\pi}} = (k+1)r.$$

即罐高 h 应为半径 r 的 $k+1$ 倍. 我们接触到的可口可乐、健力宝等罐装饮料的高几乎都是半径的 4 倍.

有人可能感到多此一举, 但你不妨设想一下, 对于一个每年生产高达几百万罐的大公司来说, 如果设计合理, 将会因节省成本而获取巨大的利润.

5.2 数学建模的过程

建立数学模型没有一个固定的模式, 我们提供以下步骤来建立模型, 仅供大家探讨.

(1) 模型准备

针对要解决的实际问题, 了解问题的实际背景, 明确建模目的及其实际意义, 掌握对象的各种信息, 尽量弄清对象的主要特征.

(2) 模型假设

根据实际对象的特征和建模的目的, 抓住问题的本质, 对问题进行必要的简化 (忽略次要因素), 并用精确的语言提出一些恰当的假设. 本步骤关系到建模的成败, 假设作得不合理或太简单, 会导致错误的或无用的模型; 假设作得过分详细, 会使你无法继续工作. 所以常常需要在合理和简化之间做出恰当的折中.

(3) 模型建立

在假设的基础上, 利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系, 建立相应的数学结构 (尽量用简单的数学工具).

(4) 模型求解

利用数学方法、数学软件和计算机技术对获取的数据资料进行处理.

(5) 模型分析

对所得的结果进行数学上的分析.

(6) 模型检验

将模型分析结果与实际情形进行比较, 以此来验证模型的准确性、合理性和适用性. 如果模型与实际较吻合, 则要对计算结果给出其实际含义, 并进行解释. 如果模型与实际吻合较差, 无法解释, 则应该修改假设, 再次重复建模过程.

(7) 模型应用

应用方式因问题的性质和建模的目的而异.

5.3 数学建模竞赛简介

数学建模竞赛 (Mathematical Contest in Modeling) 简称 MCM, 于 1985 年在美国创立. 中国于 1992 年由工业与应用数学学会在全国 10 个城市举办的全国大学生数学建模竞赛, 有 79 所院校的 314 队参加. 这项活动既受到广大同学的热烈欢迎, 也引起教育行政部门的高度重视. 数学建模竞赛的过程实际上就是这个过程的一次完整的实践, 旨在鼓励大学生运用所学的知识 (包括数学知识及其他各方面的知识) 去参与解决实际问题.

数学建模比赛的形式是真正的团体赛, 每个参赛队由三个人组成, 在规定的三天时间内

共同完成一份答卷. 每个参赛队有一个指导教师, 在比赛前负责培训并接受考题, 将考题在规定的时间内发给学生, 然后由学生自行做题. 参赛队的三名队员可以相互讨论, 可以查阅资料, 可以使用计算机和计算机软件. 一言以蔽之: 可以使用任何非生命的资源, 但不允许三人以外的其他人 (包括指导教师) 帮助做题. 参赛队的答卷是一篇完整的论文, 包括对所选问题的重新阐述, 对问题的条件和假设的阐明和必要补充甚至修改, 对为什么要用所述模型的分析, 对模型的设计和测试, 对模型的测试和检验的讨论、模型的优缺点等.

习题 5

一奶制品加工厂用牛奶生产甲、乙两种奶制品, 1 桶牛奶可以在设备 A_1 上用 $12h$ 小时加工成 $3kg$ 甲, 或者在设备 A_2 上用 $8h$ 加工成 $4kg$ 乙. 根据市场需求, 生产的甲、乙全部能售出, 且每千克甲获利 24 元, 每千克乙获利 16 元. 现在加工厂每天能得到 50 桶牛奶的供应, 每天正式工人总的劳动时间为 $480h$, 并且设备 A_1 每天至多能加工 $100kg$ 甲, 设备 A_2 的加工能力没有限制. 试为该厂制订一个生产计划, 使每天获利最大.